



TITLE:

# 制御系及び断続回路の統計的考察(Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

星野, 聰

---

CITATION:

星野, 聰. 制御系及び断続回路の統計的考察. 京都大学, 1961, 工学博士

ISSUE DATE:

1961-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/74961>

RIGHT:

京都大学審査博士学位論文

# 制御系及び断続回路の統計的考察

星 野 聡



# 制御系及び断続回路の統計的考察

星 野 聰





## 内 容 梗 概

本論文は自動制御系及び周期的断続回路に対する統計的解析理論の適用につき論ずるものであって九章よりなる。

第一章においては統計的解析理論の基本的諸関係につき略述する。

第二章においてはサンプル値制御系を対象とし、制御系入力の変動状態に依存する重みを加味した統計的設計理論を展開し、制御系偏差の分散に注目する従来の理論、及び有限整定応答を目標とする設計理論との関連を説明する。

第三章においては、リレー要素をもつ簡単な制御系に対し、制御系入力は矩形パルス列と仮定し、非線型部分を線型化することなく取り扱った。

第四章においては、操作量を各サンプル周期中の一定時点にその極性を反転させる様なサンプル値制御系につき統計的考察を行った。さらに、かかる制御系の規則的入力に対する設計法を附録Ⅱに示した。

第五章においては、偏差と共に増加する巾を有する矩形パルスにより制御対象を操作するパルス巾制御系につき統計的考察を行なった。また階段状入力に対する設計法を附録Ⅲに示した。

第六章においては、検出部の階段状特性の制御特性におよぼす影響を統計的に解析した。

第七章においては、履歴現象をもつ非線型要素を含む場合としてバックラッシュを対象とし、これを履歴現象のない要素に置換し、簡単な場合につき解析を行なった。

第八章においては、周期的断続回路に不規則変動が印加される場合につき一般的解析を行ない、簡単な例題に対して適用した。

第九章においては以上の各章においてえられた処を要約して示した。

# 目 次

第 一 章	序 論	1
[1]	緒 言	1
[2]	不規則変動の統計的解析理論	1
第 二 章	サンプル値制御系の統計的考察	5
I	サンプル点での応答のみを考慮した場合の解析	5
[1]	緒 言	5
[2]	最適条件式	8
[3]	最適条件の解法	13
[4]	指数形重み関数の場合	18
[5]	例題とその検討	22
II	重みの決定に関する考察	30
[6]	理論的考察	30
[7]	例題とその検討	31
III	サンプル点以外の時点における応答をも考慮した場合の解析	36
[8]	緒 言	36
[9]	最適条件式とその解法	38
[10]	例題とその検討	44
[11]	結 言	53
第 三 章	リレー制御系の不規則変動入力に対する応答	55
[1]	緒 言	55

2	制御対象が積分特性を有する場合	55
3	制御対象が1次遅れ特性を有する場合	61
4	制御対象が積分とむだ時間とから成る場合	64
5	例題とその検討	82
6	結 言	82
第 四 章 反転要素を用いるサンプル値制御系の設計		85
1	緒 言	85
2	反転要素を用いるサンプル値制御系の統計的設計	86
3	結 言	91
第 五 章 パルス巾制御系の解析		92
1	緒 言	92
2	パルス巾制御要素の等価線型要素による置換	93
3	パルス巾制御要素と制御対象のパルス伝達関数	98
4	例題とその検討	101
5	結 言	106
第 六 章 階段状特性を有する検出要素の制御特性に 反ぼす影響		107
1	緒 言	107
2	等価利得を用いた解析	108
3	結 言	113

第 七 章	バックラッシュを含む制御系の解析	114
[1]	緒 言	114
[2]	バックラッシュを有する制御系の解析 (I)	114
[3]	バックラッシュを有する制御系の解析 (II)	120
[4]	結 言	122
第 八 章	周期的断続回路の不規則変動入力に対する 応答の解析	123
[1]	緒 言	123
[2]	周期的断続回路の解析	123
[3]	例 題 の 解 析	128
[4]	結 言	132
第 九 章	本研究の成果	134
謝 辞		135
附 録	I. (2.4.4) 式の証明	138
附 録	II. 反転要素を用いるサンプル値制御系の規則的 入力に対する設計	141
[1]	緒 言	141
[2]	制御対象の次数が 2 次の場合	141
[3]	制御対象の次数が 3 次の場合	145
[4]	制御対象の次数が高次の場合	150
[5]	その他の諸考察	152
[6]	反転要素の模擬	152
附 録	III パルス巾制御系の階段状入力に対する設計	154

# 第一章 序 論

## ① 緒 言

不規則変動の解析及びその工学的応用が近年注目される処となり、多くの研究が行なわれて来た。その応用される分野は広範囲にわたるものであるが、本研究では自動制御系の不規則変動入力に対する解析及び設計に関し、また周期的に断続される回路の不規則変動入力に対する解析を対象とする。

衆知の如く、*N. Wiener* などにより開発された不規則変動の解析及び予測の理論は自動制御の分野にも応用されるに至った。<sup>(1)</sup> 自動制御系の入力は一概に不規則変動をなすために、その解析及び設計はこの与えられた不規則変動入力を対象としてなされるべきである。したがって、上記の不規則変動の解析理論がこれに適用されるに至ったのは当然のことであろう。本研究ではこの解析理論の検討を行ない、新しい基準にもとづく設計法を考察し、また種々の形態の自動制御系に関して解析及び設計を行なう。

更に、周期的に断続される回路に関しては従来規則的入力に対してのみ解析されていたものを不規則入力に対して拡張を行ない、その不規則変動入力に対する応答につき考察を行なった。<sup>(3)</sup>

## ② 不規則変動の統計的解析理論<sup>(1)(2)</sup>

不規則変動の解析には衆知の如く、次の操作により相関関数  $\varphi_{xx}(\tau)$  及び電力スペクトル密度  $S_{xx}(j\omega)$  を求め、これを出発点とするのが普通である。

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1, 2, 1)$$

$$S_{xx}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1, 2, 2)$$

ただし  $x(t)$  は時間  $t$  における不規則変動の瞬時値を示す。

$x(t)$  の分散  $\sigma_x^2$  は (1, 2, 1) 式よりえられる関係

$$\sigma_x^2 = \varphi_{xx}(0) \quad (1, 2, 3)$$

により相関関数と関係づけられる。

また任意の線型要素  $G(j\omega)$  の通過後の不規則変動  $y(t)$  の電力スペクトル密度  $S_{yy}(j\omega)$  は

$$S_{yy}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{xx}(j\omega) \quad (1, 2, 4)$$

により入力の電力スペクトル密度  $S_{xx}(j\omega)$  と結びつけられる。また  $y(t)$  の相関関数  $\varphi_{yy}(\tau)$  は (1, 2, 2) 式に対応する次の関係

$$S_{yy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1, 2, 2')$$

から求められる。また (1, 2, 3) 式に対応して  $y(t)$  の分散  $\sigma_y^2$  は

$$\sigma_y^2 = \varphi_{yy}(0) \quad (1, 2, 3')$$

と表わされる。従って、これらの基本的な諸関係を用いると任意の線型要素  $G(j\omega)$  の不規則変動  $x(t)$  に対する応答を調べることが出来るわけであり、 $S_{yy}(j\omega)$ ,  $\varphi_{yy}(\tau)$ ,  $\sigma_y^2$  などが所要の条件に適合するように  $G(j\omega)$  を選ぶことにより線型要素  $G(j\omega)$  の統計的設計が可能となる。

自動制御系に関する統計的解析は *N. Wiener* の理論をもとにして発展し、制御系偏差の分散を最小とする様な設計法が出来、連続な線型制御系のみか不連続なサンプル値制御系にまで拡張され、更に非線型制御系に対しても種々の研究が発表されている現状である。非線型制御系に対しては正弦波状入力の場合に適用される記述関数法の考えが *R.C. Boonton*<sup>(4)</sup> により不規則変動入力に対しても応用され、その解析に有効なることが

認められた。この方法は非線型要素（過去の履歴に関係しない要素にかぎる）を等価な利得  $K_{eg}$  を有する線型増巾器にて置換して取扱う近似的方法であり、その非線型要素入力  $x$  の分散を  $\sigma_x^2$ 、非線型特性を  $y = f(x)$  とすれば等価利得  $K_{eg}$  は、

$$K_{eg} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) p(x) dx \quad (1, 2, 5)$$

によって定義される。ここで  $p(x)$  は  $x$  の確率密度関数であつて、通常ガウス分布が仮定される。即ち、

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (1, 2, 6)$$

履歴現象を呈する様な非線型要素は不規則変動入力に対してはいまだ充分に解析が行なわれていない現状である。不規則変動は正規確率過程とみなすことが多く、また実用上もかかる性質をもつ変動が多いものと考えられるが、正規確率過程に従う入力履歴現象をもつ要素に加わる際の応答につき実用上有益な解析を行なうことは困難な問題である。本研究はバックラッシュの場合につき、このバックラッシュが簡単な、過去の履歴には関係しない要素に置換出来るものとして近似的に扱う。

上記の処は不規則変動  $x(t)$  としては定常性を仮定しているのであるが、非定常な不規則変動も存在する。この簡単な例は変数回路を通過した定常不規則変動である。この場合、回路常数が周期的に変化する場合を考察したものが周期的断続回路の解析であり、回路の電圧電流の相関関数は(1, 2, 1)式の示す様に、二つの時点  $t$  と  $t + \tau$  との時間差  $\tau$  のみの関数でなく、二つの時点 ( $t_1$  と  $t_2$  と表す) からなる一般には複雑な関数  $\varphi_{xx}(t_1, t_2)$  となる。即ち

$$\varphi_{xx}(t_1, t_2) = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle \quad (1, 2, 7)$$

ここでは(1, 2, 1)式の様に時間平均をとるわけにはゆかないのでアンサンブル平均をとるが、これを上式の様に  $\langle \rangle$  印にて示す。不規則変動  $x(t)$  の分散は上式で  $t_1 = t_2$  とおいてえられる値、即ち  $\varphi_{xx}(t, t)$



— 4 —

にひとしいが一般に  $t_i$  の関数であつて時間的に変化する。

## 第二章 サンプル値制御系の統計的考察

### I. サンプル点での応答のみを考慮した場合の解析<sup>(5)</sup>

#### ① 緒 言

統計的見地から最適な制御系を設計する研究は *N. Wiener* らによって開発されたが最近サンプル値制御系に対する研究が盛んとなり、統計的解析手段がサンプル値制御系にも適用されるに至った。特に *S. S. L. Chang*<sup>(6)</sup> の論文は *N. Wiener* の理論を最初にサンプル値制御系に対して適用し、そのシンセシスに指針を与えた。

その主要点を説明すると、制御系出力及び偏差はサンプル点のみに注目し、サンプル点間における系の応答は考慮しないで（各サンプル点における）制御系偏差の分散が最小となる様にシンセシスを行なっている。この場合、シンセシスに影響を及ぼすものとしては制御系入力の統計的性質、制御対象の有する時間遅れ、制御対象の分子が有する単位円外の零点の有無及びその位置である。制御対象の分子の零点が単位円外に存在する場合にはこの根をもし補償回路にて打ち消す場合には制御系は不安定状態となることが指摘されている。

さて、統計的解析理論では制御系の最適条件としていかなる基準に基づいて判定を行なうかが問題である。この際に考慮すべきことは、なるべく解析上便利な形の基準を採用することであり、しかも物理的にみて合理的である必要がある。

この二点から通常は偏差の分散を最小にする様に設計されるわけであるが、この際、分散を用いることにはかなりの批判がある。例えば、大きい偏差に対しては重みがかかりすぎるために大きい偏差は減少するけれども、微少な偏差は増大するとみ、偏差の分布の形によっては分散だけで規定することは不十分であるという批評である。このうち後者の批判は制御系偏差が正規分布をなす場合にはまず問題はなく、また實際上

からみても正規分布に従う場合が多いと考えられる。むしろ問題は前者の場合であって、偏差の分散が最小となる様に設計された系ではそのインディシャル応答は応答の初期における大きい偏差を急速に減少せしめる様に動作する結果として大きい行き過ぎを生じ、また応答は振動的となる。例えば Truxal<sup>(7)</sup> のあげている例では 50% の行き過ぎを示している。このような特性をもつ制御系の欠点として Truxal<sup>(7)</sup> は次の諸点を指摘している。

1. 系の安定度が悪い。またその結果として系の常数が変化した場合の系の特性に及ぼす変化が大きい。
2. 制御系は不規則変動のみならず非周期的な急激に加わった信号に対しても早く追従する必要がある。例えば自動照準装置では砲身がはじめに目標物からずっと離れている場合には大きい階段状入力が制御系に加わることになる。この場合でも目標物が射程内に入ってくる時刻までには、この制御系は過渡状態を終っていないなくてはならない。従ってインディシャル応答が長い間振動的であるのは好ましくない。

また R.S. Phillips<sup>(8)</sup> は次の様にのべている。即ち、偏差が好ましくない度合は、偏差が生ずる時点に関係する。例えば、一つの動作状態 (mode of operation) から他の動作状態に移る間の偏差は、与えられた動作状態中における偏差より幾分好ましいであろうと云っている。このことは上記の Truxal の批判と相通するものがあり、このような欠点は前記の様に誤差の分散を最小にするという基準を用いる結果大きい偏差に対してあまりに大きい重みがかゝりすぎるために生じたものと考えられる。

本章の目的とするところは偏差の分散を基準として用いることによつて生ずるかかる欠点を除去するため新しい基準を採用し、N. Wiener, S. S. L. Chang 等により発展された統計的理論の考えを利用してサンプル値制御系を対象として解析を行なったものである。

ここで新しく採用した基準を説明すると、従来行なわれてきた制御系偏差の二乗の他に制御系入力の変動状態に依存する重みを附加するこ

とにより、制御系入力の変動が大きい場合にはこの重みを減少せしめ、入力の変動が収まれば重みを増加せしめることである。かかる重みを附加することにより安定度の高い制御系の統計的設計が可能であり、制御系入力として急激な変動が加わってもその変動時には重みを減少するので系は入力変動の激しい期間には、入力変動が終った後の系の応答を悪化してまで偏差を小さくすることは要求せられなくなる。また、系入力の変動が終ると重みを増加する結果として系の非過渡状態での応答特性は良好となるわけである。

ここで変動状態という語に吟味を加える必要がある。例えば制御系入力が一様状態になった場合に変動がなくなり、制御系入力は何らかの変化をすれば変動状態にあるとし、その変化の割合が大きい程変動がはげしいと考えることも出来るが、ここではたとえば制御系入力の時間的变化が一様に近づく場合に重みを増加し、制御系入力の時間的变化の変動が大きい程重みを減少させる様な基準も考えることができる。この様な基準は追従制御系の場合に特に有用であると考えられる。更に制御系入力の時間に対する二次微係数が一定に近づく程重みを増加する様な制御系或いは更に時間に対するより高次の微係数の変化に注目しても制御系が設計出来るものと考えられる。

以上を数式により表現すると、任意のサンプル時点  $T_0$  における制御系偏差を  $e(T_0)$  とし、 $T_1, \dots, T_n$  を適当にえらんだ時点とし、時点  $(T_0 - T_1), \dots, (T_0 - T_n)$  における制御系入力を  $r(T_0 - T_1), \dots, r(T_0 - T_n)$  と表わせば、新らしく採用する基準  $I$  は

$$I = \frac{f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) e(T_0)^2}{(2, 1, 1)} \quad (2, 1, 1)$$

と表わされる。関数  $f$  は上記の如く、入力  $r$  の変動状態に依存する様な重み関数であって、入力の変動が大きくなる程重みを減少する様に選定されている。また  $(T_0 - T_1), (T_0 - T_2), \dots, (T_0 - T_n)$  はサンプル時点と一致する様に選定すると解析上便利であるが、必ずしもサンプル点でなくてもよい。関数  $f$  としては種々の選定法があると考えられるが解

折上便利な形であることが望ましい。上記の要求を満たす様な関数として制御系入力が一様状態に近づく程重みを増加し、入力の変動が大きい程重みを減ずる場合の例として、

$$f = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} (r(T_0) - r(T_0 - T))^2 \right] \quad (2, 1, 2)$$

が挙げられる。ここに  $T$  はサンプル間隔である。従って  $(T_0 - T)$  は  $T_0$  より一つ前のサンプル点に相当するから、この両サンプル点での制御系入力  $r(T_0 - T)$  と  $r(T_0)$  との差が大なる程  $f$  は減少することになり所要の特性であることがわかる。

同様に制御系入力の時間的变化が一定に近づく程重みを増加する基準に対しては関数  $f$  は例えば

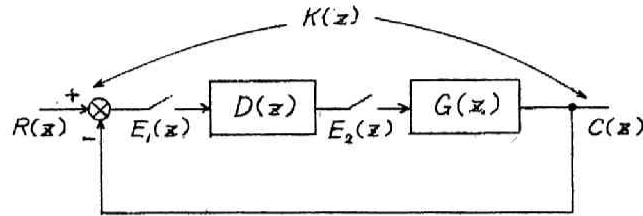
$$f = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} \{r(T_0) - 2r(T_0 - T) + r(T_0 - 2T)\}^2 \right] \quad (2, 1, 3)$$

と選べばよい。制御系入力のさらに高次の微係数に注目する場合にも同様の形の関数  $f$  を作ることが出来る。

以下の考察ではサンプル値制御系を対象とし二つの場合に分けて解析をすゝめる。即ち、その一つはサンプル点における応答にのみ注目し、サンプル点間の応答は考慮しない取扱いとサンプル点間の応答をも考慮して解析する場合である。当然後者の解析は前者のそれに比して複雑となるが合理的であるといえる。また制御系入力の統計的性質に対して制限を加える必要が生じるため、制御系入力は正規確率過程に従うものと仮定しておく。

## 2 最適条件式

第 2, 2, 1 図に本節で対象とするサンプル値制御系の構成を示す。  $R(Z)$ ,  $C(Z)$ ,  $E_1(Z)$ ,  $E_2(Z)$  は各々制御系入力、出力、偏差、操作量の  $Z$  変換、  $D(Z)$ ,  $G(Z)$  は各々制御装置及び制御対象 (ホールド回路を含む) のパルス伝達関数、  $K(Z)$  は制御系全体のパルス伝達関数を表わすものと



第 2, 2, 1. 図  
サンプル値制御系の構成

する。即ち、

$$K(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (2.2.1)$$

この制御系が安定であり、また物理的に実現可能なるためには  $K(z)$  は次の形を有していなくてはならない。<sup>(6)</sup>

$$K(z) = z^{-m'} P(z) H_2(z) \quad (2.2.2)$$

ただし

$$P(z) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 - z/\alpha_i) \quad (2.2.3)$$

$$m' = m'' + \ell \quad (2.2.4)$$

で与えられる。ここで  $m''$  は制御対象が有する時間遅れであって、制御系はこの時間遅れよりは早くは応答出来ない。従って上式は  $K(z)$  が  $z^{-m''}$  なる因子を含むことを要求している。また上式は  $K(z)$  が  $z^{-\ell} \prod_{i=1}^{\ell} (1 - z/\alpha_i)$  なる因子を含むことを要求する。ただし  $\ell$  は制御対象  $G(z)$  の分子が有する単位内外の零点の数であり  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, \ell$ ) はその零点である。この因子は制御対象  $G(z)$  の分子が有する単位内外の零点を制御装置  $D(z)$  により打消す様に設計した場合に生ずる制御系の不安定をさけるために必要である。即ち、かゝる零点が制御装置  $D(z)$  により打消されることのない様に予め  $K(z)$  に含めておくわけである。また  $H_2(z)$  は単位円内に極を有する任意のパルス伝達関数である。  
(2.2.3) 式で与えられた関数  $P(z)$  は単位円外  $\alpha_i$  に零点を有するか

ら  $H_2(z)$  の分母と打ち消し合うことはない。

さて基準として (2, 1, 1) 式で与えた量  $I$  を採用する。制御系偏差は制御系入, 出力の差であるから (2, 1, 1) 式は、

$$I = \frac{f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) (r(T_0) - c(T_0))^2}{(2, 2, 5)}$$

と表される。従ってこの  $I$  を最小にする様に制御系のパルス伝達関数  $K(z)$  を決定すればよい。上式は

$$I = \frac{f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) r(T_0)^2}{-2 f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) r(T_0) c(T_0)} + \frac{f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) c(T_0)^2}{(2, 2, 6)}$$

と分解することができる。上式の第一項は制御系入力  $r$  にのみ依存する項であるから、いかに制御系のパルス伝達関数  $K(z)$  を送んでも不変である。従って  $I$  を最小にするという問題では除外しておいて差支えない。従って次式で与えられる  $I'$  を最小にする様に設計すればよい。

$$I' = \frac{-2 f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) r(T_0) c(T_0)}{+ f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) c(T_0)^2} \quad (2, 2, 7)$$

いま制御系のパルス伝達関数  $K(z)$  及び  $z^{-m} P(z)$ ,  $H_2(z)$  のインパルス応答を  $h_0(\beta T)$  及び  $h_1(\beta T)$ ,  $h_2(\beta T)$  と表わせば (ただし  $T$  はサンプル間隔,  $\beta = 0, 1, \dots$ )

$$h_0(\beta T) = \sum_{\alpha=0}^{\beta} h_1(\alpha T) h_2(\beta - \alpha T) \quad (2, 2, 8)$$

こゝで  $h_1(\alpha T)$  は上記の様に  $z^{-m} P(z)$  のインパルス応答として与えられているが、 $h_2(\beta - \alpha T)$  は決定すべき未知関数である。制御

系出力  $C(x)$  は  $C(x) = K(x)R(x)$  であるから時点  $T_0$  における出力  $C(T_0)$  は

$$C(T_0) = \sum_{\beta=0}^{\infty} h(\beta T) r(T_0 - \beta T) \quad (2.2, 9)$$

と表わされる。

ここで便宜上次式により関数  $W_{h,k'}$  を定義する。

$$W_{h,k'} = f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) r(T_0 - kT) r(T_0 - k'T) \quad (2.2, 10)$$

上式は制御系入力の性質及び重みとして採用する関数  $f$  の形にのみ依存する関数である。(2.2, 8) 式及び (2.2, 9) 式を (2.2, 7) 式に代入して (2.2, 10) 式の表現を用いると、

$$\begin{aligned} I' = & -2 \sum_{\beta=0}^{\infty} W_{\beta,0} \sum_{\alpha=0}^{\beta} h_1(\alpha T) h_2(\beta - \alpha T) \\ & + \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\beta'=0}^{\infty} W_{\beta,\beta'} \sum_{\alpha=0}^{\beta} \sum_{\alpha'=0}^{\beta'} h_1(\alpha T) h_1(\alpha' T) h_2(\beta - \alpha T) h_2(\beta' - \alpha' T) \end{aligned} \quad (2.2, 11)$$

ここで  $\beta - \alpha = l$  とおけば

$$\begin{aligned} I = & -2 \sum_{\alpha=0}^{\infty} h_1(\alpha T) \sum_{l=0}^{\infty} h_2(l T) W_{\alpha+l,0} \\ & + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\alpha'=0}^{\infty} h_1(\alpha T) h_1(\alpha' T) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} h_2(l T) h_2(l' T) W_{\alpha+l, \alpha'+l'} \end{aligned} \quad (2.2, 12)$$

この  $I'$  を最小にする様な  $h_2(lT)$  に対しては上式の変分をとることにより次式が成立することがわかる。

$$-\sum_{\alpha=0}^{\infty} h_1(\alpha T) W_{\alpha+l,0} + \sum_{l'=0}^{\infty} h_2(l' T) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\alpha'=0}^{\infty} h_1(\alpha T) h_1(\alpha' T) W_{\alpha+l, \alpha'+l'} = 0 \quad (2.2, 13)$$

ただし  $l = 0, 1, 2, \dots$



ここで

$$\Psi(l, l') \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\alpha'=0}^{\infty} h_1(\alpha T) h_1(\alpha' T) W_{\alpha+l, \alpha'+l'} \quad (2, 2, 14)$$

$$\Phi(l) \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} h_1(\alpha T) W_{\alpha+l, 0} \quad (2, 2, 15)$$

により  $\Psi(l, l')$  及び  $\Phi(l)$  を定義すれば (2, 2, 13) 式は

$$\Phi(l) = \sum_{l'=0}^{\infty} h_2(l' T) \Psi(l, l') \quad (2, 2, 16)$$

と表わされる。これが所要の最適条件を示す方程式である。(2, 2, 14) (2, 2, 15) 両式からみて  $\Phi(l)$  及び  $\Psi(l, l')$  は  $W_{\alpha+l, 0}$  及び  $W_{\alpha+l, \alpha'+l'}$  を含み、これらは (2, 2, 10) 式で示される様に関数  $f$  の形によるは勿論、制御系入力の性質に依存する。更に解析をすすめるために制御系入力とは正規確率過程に従うとの仮定を採用する。

この場合には、関数  $W_{k, k'}$  は制御系入力  $r$  の相関関数を  $\varphi_{rr}(\tau)$  と表わすことにすれば

$$W_{k, k'} = \varphi_{rr}(\overline{k-k'} T) \bar{f} + \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ir}(\overline{k-k'} T - T_i) \varphi_{rr}(\overline{k-k'} T - T_j) \bar{f}_{ij} \quad (2, 2, 17)$$

と表わされることが証明出来る。ここで  $\bar{f}$  及び  $\bar{f}_{ij}$  は重み関数  $f$  および  $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_j}$  の平均値である。ただし

$$r_i \equiv r(T_0 - T_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2, 2, 18)$$

を意味するものとする。数式的には、 $r_i$  の同時確率密度関数を  $p(r_1, r_2, \dots, r_n)$  と表わすことにすれば

$$\bar{f} = \underbrace{\int \dots \int}_{(n \text{個})} f(r_1, r_2, \dots, r_n) p(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 dr_2 \dots dr_n \quad (2, 2, 19)$$

$$\bar{f}_{ij} = \underbrace{\int \dots \int}_{(n \text{個})} \frac{\partial^2 f(r_1, r_2, \dots, r_n)}{\partial r_i \partial r_j} p(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 dr_2 \dots dr_n \quad (2, 2, 20)$$

と表わされる。

### 3 最適条件の解法

(2, 2, 14) 式及び (2, 2, 15) 式に (2, 2, 17) 式の表現を用いると、

$$\Psi(l, l') = \bar{f} \zeta(l-l') + \sum_{ij=1}^n \bar{f}_{ij} \eta_i(l) \eta_j(l') \quad (2, 3, 1)$$

及び

$$\Phi(l) = \bar{f} \eta_0(l) + \sum_{ij=1}^n \bar{f}_{ij} \eta_i(l) \varphi_{rr}(T_j) \quad (2, 3, 2)$$

がえられる。ただし  $\zeta(l-l')$ ,  $\eta_i(l)$  及び  $\eta_0(l)$  は

$$\zeta(l-l') \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\alpha'=0}^{\infty} h_1(\alpha T) h_1(\alpha' T) \varphi_{rr}(\overline{l-l'+\alpha-\alpha'} T) \quad (2, 3, 3)$$

$$\eta_i(l) \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} h_1(\alpha T) \varphi_{rr}(\overline{\alpha+l} T - T_i) \quad (2, 3, 4)$$

$$\eta_0(l) \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} h_1(\alpha T) \varphi_{rr}(\overline{\alpha+l} T) \quad (2, 3, 5)$$

により与えられる。

(2, 3, 1) 式、(2, 3, 2) 式を用いると (2, 2, 16) 式は

$$\sum_{l'=0}^{\infty} h_2(l' T) \zeta(l-l') = K(l) \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (2, 3, 6)$$

と表わすことができる。ただし  $D_j$  及び  $K(l)$  は

$$D_j \equiv \sum_{l'=0}^{\infty} h_2(l' T) \eta_j(l') \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2, 3, 7)$$

$$K(l) \equiv \eta_0(l) + \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right) \eta_i(l) \{ \varphi_{rr}(T_j) - D_j \} \quad (2, 3, 8)$$

で与えられる。(2, 3, 6) 式で  $h_2(l' T)$  は勿論未知であるが  $D_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) なる  $n$  個の常数もまた  $h_2(l' T)$  を含むので未知である。

(2, 3, 6) 式は Wiener-Hopf 型の方程式であるからこの解法には N. Wiener の理論をサンプル値制御系に適用した S. S. L. Chang のとった方法<sup>(6)</sup>を用いることができる。先ず下式により  $U(l)$  を定義する。

$$\sum_{l'=0}^{\infty} h_2(l'T) \zeta(l-l') - K(l) \equiv U(l) \quad (2, 3, 9)$$

(2, 3, 6) 式から  $U(l)$  なる関数は  $l=0, 1, 2, \dots$  では零となることがわかる。

ここで  $\zeta(l-l')$ ,  $h_2(l'T)$ ,  $K(l)$ ,  $U(l)$  の  $z$  変換を次の様に定義する。

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta(l) z^{-l} = Z(z) \quad (2, 3, 10)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} h_2(lT) z^{-l} = H_2(z) \quad (2, 3, 11)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} K(l) z^{-l} = L(z) \quad (2, 3, 12)$$

$$\sum_{l=-1}^{-\infty} U(l) z^{-l} = zV(z) \quad (2, 3, 13)$$

次に (2, 3, 9) 式の両辺に  $z^{-l}$  を乗じ、 $l$  について  $(-\infty, \infty)$  の区間で加算すれば、

$$H_2(z) Z(z) - L(z) = zV(z) \quad (2, 3, 14)$$

がえられる。ここで  $V(z)$  は (2, 3, 13) 式から明らかな様に常数項及び  $z$  について正の累の項のみから成る関数である。従って単位内外に極を有する。

次に (2, 3, 10) 式で定義された  $Z(z)$  は (2, 3, 3) 式を用いると、

$$Z(z) = P(z^{-1}) P(z) W_0(z) \quad (2, 3, 15)$$

がえられる。ただし  $P(z)$  は (2, 2, 3) 式で定義された関数であり、 $W_0(z)$  は

$$W_0(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_{rr}(lT) z^{-l} \quad (2, 3, 16)$$

により与えられる。ここで  $\varphi_{rr}(lT)$  は制御系入力  $r$  の自己相関関数である。

この  $W_0(z)$  は次の二つの因子に分解することができる。即ち、

$$W_0(z) = Y(z) Y(z^{-1}) \quad (2, 3, 17)$$

ただし  $Y(z)$  は極及び零点を単位円内にのみ有し、 $Y(z^{-1})$  は極及び零点を単位円外にのみ有する関数である。(2, 3, 15) 式、(2, 3, 17) 式により (2, 3, 14) 式は

$$H_2(z) P(z^{-1}) P(z) Y(z) Y(z^{-1}) - L(z) = zV(z) \quad (2, 3, 18)$$

この両辺を  $zP(z)Y(z^{-1})$  で除して

$$z^{-1} P(z^{-1}) Y(z) H_2(z) - \frac{L(z) z^{-1}}{P(z) Y(z^{-1})} = \frac{V(z)}{P(z) Y(z^{-1})} \quad (2, 3, 19)$$

ここで左辺第二項  $L(z) z^{-1} / P(z) Y(z^{-1})$  を単位円内にのみ極を有する部分  $Q_{in}(z)$  と常数部分及び単位円外にのみ極を有する部分  $Q_{out}(z)$  に分解すると、

$$z^{-1} P(z^{-1}) Y(z) H_2(z) - Q_{in}(z) = Q_{out}(z) + \frac{V(z)}{P(z) Y(z^{-1})} \quad (2, 3, 20)$$

がえられる。ここで両辺の極の位置を考察すれば左辺は単位円内に、右辺は単位円外に存在することがわかる。従って上式は常数でなければならぬ。しかるに  $P(z^{-1}) Y(z) H_2(z)$  は  $z$  の一乗の項を有しないし、また  $Q_{in}(z)$  は常数項を有していない。従って上式は零にひとしい。従って  $H_2(z)$  として、

$$H_2(z) = \frac{z Q_{in}(z)}{P(z^{-1}) Y(z)} \quad (2, 3, 21)$$

がえられる。次に (2, 3, 12) 式で定義された  $L(z)$  は (2, 3, 8) 式を用いると

$$L(z) = z^{m'} P(z^{-1}) \left[ W_0(z) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\bar{f}_{ij}}{f_j} W_i(z) \{ \varphi_{rr}(T_j) - D_j \} \right] \quad (2, 3, 22)$$

がえられる。ただし  $W_i(z)$  は

$$W_i(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z^{-\ell} \varphi_{rr}(\ell T - T_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2, 3, 23)$$

で定義される。(2, 3, 19) 式の左辺第二項  $L(z)z^{-1}/P(z)Y(z^{-1})$  を  $Q(z)$  とおけば (2, 3, 22) 式を用いて、

$$Q(z) = \frac{z^{m-1}P(z^{-1})}{P(z)Y(z^{-1})} \left[ W_0(z) + \sum_{ij=1}^n \frac{\bar{f}_{ij}}{f} W_i(z) \{ \varphi_{rr}(T_j) - D_j \} \right] \quad (2, 3, 24)$$

ここで上式に含まれた  $\frac{z^{m-1}P(z^{-1})}{P(z)Y(z^{-1})} W_i(z)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) を単位円内に極を有する部分  $Q_i^*(z)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) と単位円外に極を有する部分及び常数項より成る部分  $Q_i^{**}(z)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) とに分解する。即ち、

$$\frac{z^{m-1}P(z^{-1})}{P(z)Y(z^{-1})} W_i(z) = Q_i^*(z) + Q_i^{**}(z) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2, 3, 25)$$

この  $Q_i^*(z)$  を用いると (2, 3, 24) 式から

$$Q_{in}(z) = Q_0^*(z) + \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right) Q_i^*(z) \{ \varphi_{rr}(T_j) - D_j \} \quad (2, 3, 26)$$

がえられる。従って (2, 3, 21) 式は、

$$H_2(z) = \frac{z}{P(z^{-1})Y(z)} \left[ Q_0^*(z) + \sum_{ij=1}^n \frac{\bar{f}_{ij}}{f} Q_i^*(z) \{ \varphi_{rr}(T_j) - D_j \} \right] \quad (2, 3, 27)$$

と表わすことができる。 $D_j$  なる  $n$  個の常数は (2, 3, 7) 式からえられる関係

$$D_j = ct. \{ H_2(z) z^{-m'} P(z) W_j(z^{-1}) \} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2, 3, 28)$$

に (2, 3, 27) 式の  $H_2(z)$  を用いることによって決定することができる。ただし  $ct.$  なる符号は括弧内の  $z$  の関数の常数分を示すものとする。計算の結果  $D_j$  は

$$D_j = \Delta_{j0} + \sum_{k, \ell=1}^n \frac{\bar{f}_{k\ell}}{f} \{ \varphi_{rr}(T_\ell) - D_\ell \} \Delta_{jk} \quad (j, k=1, 2, \dots, n) \quad (2, 3, 29)$$

を解くことによって決定することができる。ただし  $\Delta_{jk}$  は

$$\Delta_{jk} = ct. \left\{ \frac{Q_k^*(z) \cdot z^{-m'-1} P(z) W_j(z^{-1})}{P(z^{-1}) Y(z)} \right\} \quad (j=1, 2, \dots, n; k=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2, 3, 30)$$

従ってこれら  $n$  個の  $D_j$  の値を (2, 3, 27) 式に代入すれば  $H_2(z)$  が求まる。

制御系全体のパルス伝達関数  $K(z)$  は (2, 2, 2) 式、即ち、

$$K(z) = z^{-m'} P(z) H_2(z) \quad (2, 2, 2)$$

により、また所要の制御装置  $D(z)$  は (2, 2, 1) 式の関係から、

$$D(z) = \frac{K(z)}{G(z)} \cdot \frac{1}{1-K(z)} \quad (2, 3, 31)$$

として求められる。制御系全体のパルス伝達関数  $K(z)$  は計算の結果、

$$K(z) = \frac{z^{-m'+1} P(z)}{P(z^{-1}) Y(z)} \left[ Q_0^*(z) + [Q] \left[ [U] + \left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right] [\Delta] \right]' \left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right] \right] \left[ [\varphi_{rr}] - [\Delta_0] \right] \quad (2, 3, 32)$$

で与えられる。ここで上式中のマトリックスは、

$$[Q] = [Q_1^*(z), \dots, Q_n^*(z)] \quad (2, 3, 33)$$

$$\left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{f}_{11}}{\bar{f}}, & \dots, & \frac{\bar{f}_{1n}}{\bar{f}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\bar{f}_{n1}}{\bar{f}}, & \dots, & \frac{\bar{f}_{nn}}{\bar{f}} \end{bmatrix} \quad (2, 3, 34)$$

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \Delta_{11}, & \dots, & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1}, & \dots, & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (2, 3, 35)$$

$$[\varphi_{rr}] = \begin{bmatrix} \varphi_{rr}(T_1) \\ \vdots \\ \varphi_{rr}(T_n) \end{bmatrix} \quad (2, 3, 36)$$

$$[\Delta_o] = \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \vdots \\ \Delta_{no} \end{bmatrix} \quad (2, 3, 37)$$

で定義されるものである。

#### ④ 指数形重み関数の場合

(2, 3, 32)式で与えられた制御系パルス伝達関数  $K(z)$  は  $[\bar{f}_{ij}/\bar{f}]$  なる行列を含んでいる。 $\bar{f}$  及び  $\bar{f}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) は (2, 2, 19) 式及び (2, 2, 20)式に示されるものであり、制御系入力の統計的性質及び  $f$  なる関数形によって定まる。

関数形  $f$  については、

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n) = \exp. \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} r_i r_j \right] \quad (2, 4, 1)$$

と表わされる場合に限定し、かつ  $a_{ij} = a_{ji}$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) 制御系入力は正規確率過程に従うと仮定すると、その同時確率密度関数  $p(r_1, r_2, \dots, r_n)$  は、

$$p(r_1, r_2, \dots, r_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |M|^{-\frac{1}{2}} \exp. \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{M_{ij}}{|M|} r_i r_j \right] \quad (2, 4, 2)$$

ただし  $M$  は制御系入力の共分散行列で、

$$[M] = \begin{bmatrix} \varphi_{rr}(0), & \varphi_{rr}(T_1 - T_2), & \dots, & \varphi_{rr}(T_1 - T_n) \\ & & & \\ & & & \\ \varphi_{rr}(T_1 - T_n), & & & \varphi_{rr}(0) \end{bmatrix} \quad (2, 4, 3)$$

であり、また  $M_{ij}$  は  $[M]$  の  $i$  行  $j$  列の要素に関する余因子を意味するものとする。

(2, 2, 19)式及び (2, 2, 20)式に (2, 4, 1) 式及び (2, 4, 2) 式を用いて

$\left[\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}}\right]$  を求めると

$$\left[\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}}\right] = -[a][c]^{-1} \quad (2,4,4)$$

なる関係をうる。ただし  $[c]$  は

$$[c] \equiv [U] + [M][a] \quad (2,4,5)$$

で定義される。 $[U]$  は単位マトリックス、 $[a]$  は (2,4,1) 式に含まれる  
 常数  $a_{ij}$  を元素とするマトリックスで

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2,4,6)$$

で与えられる。(附録 I 参照)

(2,3,32) 式中の  $\left[\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}}\right]$  に (2,4,4) 式を用いて多少の変形をすれば系の  
 パルス伝達関数  $K(z)$  は

$$K(z) = \frac{z^{-m+i} P(z)}{P(z^{-1}) Y(z)} \left[ Q_o^*(z) - [Q] \left[ [U] + [a][y] \right]^{-1} [a] \right] \quad (2,4,7)$$

となる。ただし上式中のマトリックス  $[y]$  は

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11}, & \cdots, & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}, & \cdots, & y_{nn} \end{bmatrix} \quad (2,4,8)$$

$$y_{ij} = ct. \left[ \frac{Q_i^{**}(z) z^{-m+i} P(z) Y(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] \quad (2,4,9)$$

で与えられる。

ここで更に重み関数  $f$  を次の形に限定してみよう。

$$f(r_1, r_2, \cdots, r_n) = \exp. \left\{ -\frac{\epsilon^2}{2} \left( \sum_{i=1}^n b_i r_i \right)^2 \right\} \quad (2,4,10)$$



これは (2, 4, 1) 式で、

$$a_{ij} = \epsilon^2 b_i b_j \quad (2, 4, 11)$$

となった場合であるが、これを (2, 4, 7) 式に用いると簡明な結果がえられる。

ただし重み関数に含まれる時点  $T_i$  を

$$T_i = (i-1)T \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2, 4, 12)$$

とえらぶ。即ち  $T_i$  はすべてサンプル点上に選定される。この場合には制御系のパルス伝達関数  $K(z)$  は

$$K(z) = \frac{z^{-m'+1} P(z)}{P(z^{-1}) Y(z)} \left[ Q_i^*(z) - \frac{[Q][a][y_1]}{\left(1 + \sum_{k,l=1}^n y_{kl} a_{kl}\right)} \right] \quad (2, 4, 13)$$

と表わされる。ただし

$$y_{kl} = ct. \left\{ \frac{Q_l^{**}(z) z^{-m'+k} P(z) Y(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right\} \quad (2, 4, 14)$$

$$[y_1] = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} \quad (2, 4, 15)$$

記号  $ct.$  は括弧内の関数の定数項を示すものとする。

この式で重みを考慮せぬ場合、即ち制御系偏差の分散のみに注目する場合には  $\epsilon \rightarrow 0$  とすればよく、この場合  $a_{kl}$  及び  $[a]$  は零及び零マトリックスとなり

$$K(z) = \frac{z^{-m'+1} P(z)}{P(z^{-1}) Y(z)} \cdot Q_i^*(z) \quad (2, 4, 16)$$

となり S. S. L. Chang のえた結果<sup>(6)</sup>と一致する。

次に重みの効果を増してゆき  $\epsilon \rightarrow \infty$  とすると、( $m''=1$ ,  $P(z)=1$  と仮定すれば) 分母は、

$$1 + \sum_{k,l=1}^n y_{lk} a_{kl} \longrightarrow \sum_{k,l=1}^n y_{lk} a_{kl} \quad (2,4,17)$$

と考えられ、また  $y_{lk}$  は  $y_{11}$  の他は零となるから (2,4,13) 式の括弧内は、

$$Q_i^*(z) - \frac{[Q][a][y_i]}{1 + \sum_{k,l=1}^n y_{lk} a_{kl}} = - \frac{Q_2^*(z)b_2 + \dots + Q_n^*(z)b_n}{b_1} \quad (2,4,18)$$

となる。しかるに一般に

$$Q_i^*(z) = \frac{z^{m'-i} P(z^{-1}) Y(z)}{P(z)} \quad (i \geq m''+1) \quad (2,4,19)$$

が成立する。これを (2,4,18) 式に用いると、

$$Q_i^*(z) - \frac{[Q][a][y_i]}{(1 + \sum_{k,l=1}^n y_{lk} a_{kl})} = - \frac{z^{-1}b_2 + \dots + z^{-1-n}b_n}{b_1} Y(z) \quad (2,4,20)$$

従って (2,4,13) 式は、

$$K(z) = - \frac{z^{-1}b_2 + \dots + z^{-1-n}b_n}{b_1} \quad (2,4,21)$$

と表わされる。これは <sup>(9)</sup>Bergen, Ragazzini によって与えられた最適なパルス伝達関数に一致している。例えば、制御系入力が一定に近づく程、重みの効果が増す様にすると  $b_1=1$ ,  $b_2=-1$ ,  $b_3=b_4=\dots=0$  ととればよく、この場合 (2,4,21) 式は、

$$K(z) = z^{-1} \quad (2,4,22)$$

となる。また制御系入力の変動の割合が一定に近づく程重みの効果が増す様にすると  $b_1=1$ ,  $b_2=-2$ ,  $b_3=1$ ,  $b_4=b_5=\dots=0$  ととればよく、(2,4,21) 式は、

$$K(z) = 2z^{-1} - z^{-2} \quad (2,4,23)$$

となるのである。従って制御系入力の変動状態に依存する重みを考慮す

ることによって、一般に制御系偏差の分散を最小にする設計法と有限整定時間応答を示す様にする設計法との中間を結ぶ様な設計法がえられることがわかる。

## 5 例題とその検討

最も簡単な場合として重み関数  $f$  を制御系入力が一常に近づく程重みを増す形として

$$f(r_1, r_2) = \exp \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} (r_1 - r_2)^2 \right] \quad (2, 5, 1)$$

と選定する。また制御対象のおくれ  $m''=1$  とし、制御対象  $G(z)$  の分子は単位円外には零点を有しないと仮定する。従って  $P(z)=1$  とおける。また制御系入力の自己相関関数  $\varphi_{rr}(\tau)$  は

$$\varphi_{rr}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \quad (2, 5, 2)$$

と仮定する。便宜上  $e^{-\alpha T}$  を  $q$  と表すと (2, 3, 16) 式の  $W_0(z)$  は

$$W_0(z) = \frac{(1 - q^2)}{(1 - z^{-1}q)(1 - zq)} \quad (2, 5, 3)$$

となる。これを (2, 3, 17) 式に従って分解すると

$$Y(z) = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{1 - z^{-1}q} \quad (2, 5, 4)$$

$$Y(z^{-1}) = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{1 - zq} \quad (2, 5, 5)$$

となる。また (2, 3, 25) 式から

$$Q_1^*(z) = \sqrt{1 - q^2} \cdot \frac{q}{z - q} \quad (2, 5, 6)$$

$$Q_1^{**}(z) = \sqrt{1 - q^2} \quad (2, 5, 7)$$

$$Q_2^*(z) = \sqrt{1 - q^2} \cdot \frac{1}{z - q} \quad (2, 5, 8)$$

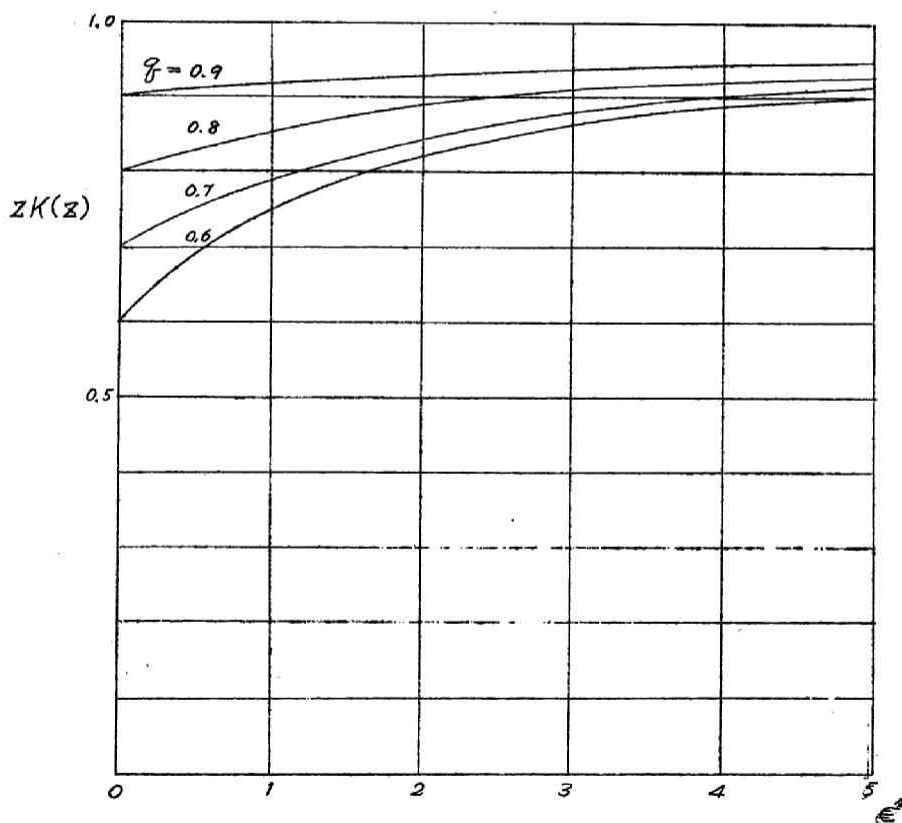
が、また (2, 4, 14) 式から

$$y_{11} = 1 - \bar{g}^2 \quad (2, 5, 9)$$

がえられる。これらを (2, 4, 13) 式に用いて次式をうる。

$$K(z) = z^{-1} \left[ \bar{g} + \frac{\epsilon^2(1 - \bar{g}^2)}{1 + \epsilon^2(1 - \bar{g}^2)} (1 - \bar{g}) \right] \quad (2, 5, 10)$$

第 2, 5, 1 図は上式の [ ] 内の値を示すもので、横軸が重み  $\epsilon^2$  を示す。 $\epsilon^2$  が零の場合は Wiener 流に計算した場合と一致し、 $\epsilon^2$  を  $\infty$  にして行くと上式からもわかる様に Bergen, Ragazzini 流に求めた有限整定時間応答を与える。



第 2, 5, 1 図

重み  $\epsilon^2$  と  $K(z)$  との関係

同様に重み関数  $f$  を外乱の勾配が一定に近づく場合に重みを増加する様に選定した場合には、

$$f = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} (r_1 - 2r_2 + r_3)^2 \right] \quad (2, 5, 11)$$

$$K(z) = z^{-1} \left[ q + \frac{\epsilon^2(1-q^2)}{1+\epsilon^2(1-q^2)} (2-q-z^{-1}) \right] \quad (2, 5, 12)$$

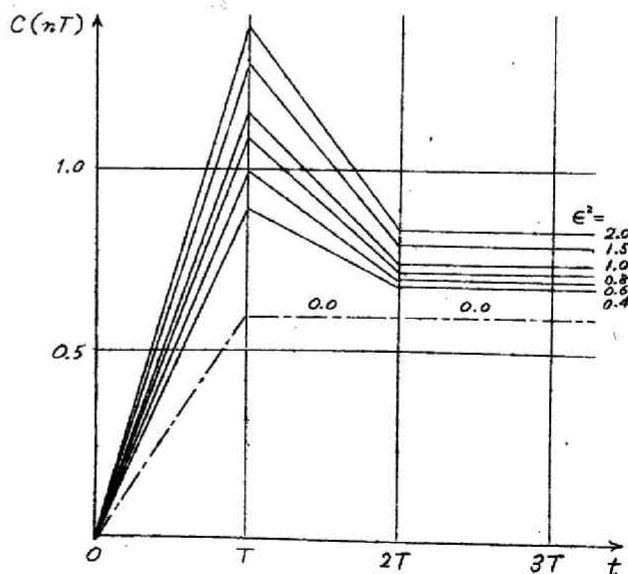
また加速度状の変化をする外乱に対して重みをかける場合には、

$$f = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} (r_1 - 3r_2 + 3r_3 - r_4)^2 \right] \quad (2, 5, 13)$$

$$K(z) = z^{-1} \left[ q + \frac{\epsilon^2(1-q^2)}{1+\epsilon^2(1-q^2)} (3-q-3z^{-1}+z^{-2}) \right] \quad (2, 5, 14)$$

さらに高次の外乱の時間的变化に対して重みを考慮する場合も同様にして求められる。

第 2, 5, 2 図は  $q = 0.6$  とえらんだ場合の (2, 5, 12) 式で表わされる制御系のインディシャル応答を示す。第 2, 5, 3 図は  $q = 0.9$  の場合について同様の計算を行なった結果を示す。両者を比較すると  $q$  が 1 に近づくほど行きすぎ量が減じ、また定常特性も良好となることがわかる。尚この場合も  $\epsilon^2$  を  $\infty$  にして行くと  $q$  の如何にかかわらず  $t = 2T$



第 2, 5, 2 図

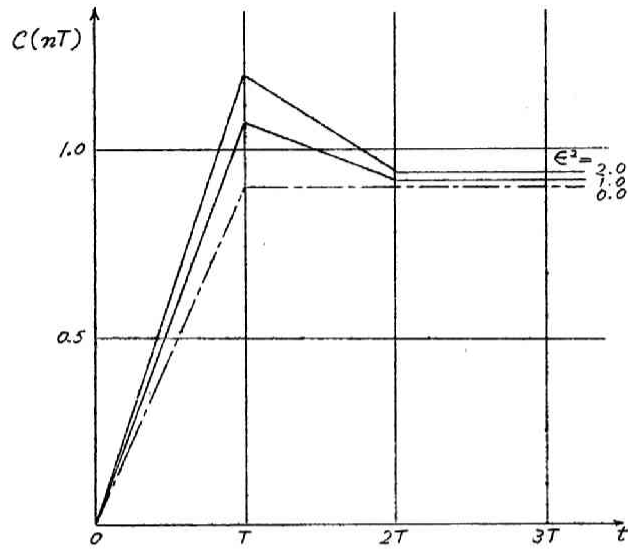
速度状入力に対して重みを考慮した場合のインディシャル応答 ( $q = 0.6$ )

において応答は 1.0 になることに注意すべきである。また  $\epsilon^2=0$  なる場合の応答は Wiener 流に解析した場合の応答を示すものである。

次に (2.5.12) 式で表わされる制御系の速度状入力に対する応答を解析した。 $g=0.6$  及び  $0.9$  の場合の制御系の応答を第 2.5.4 図及び第 2.5.5 図に示す。

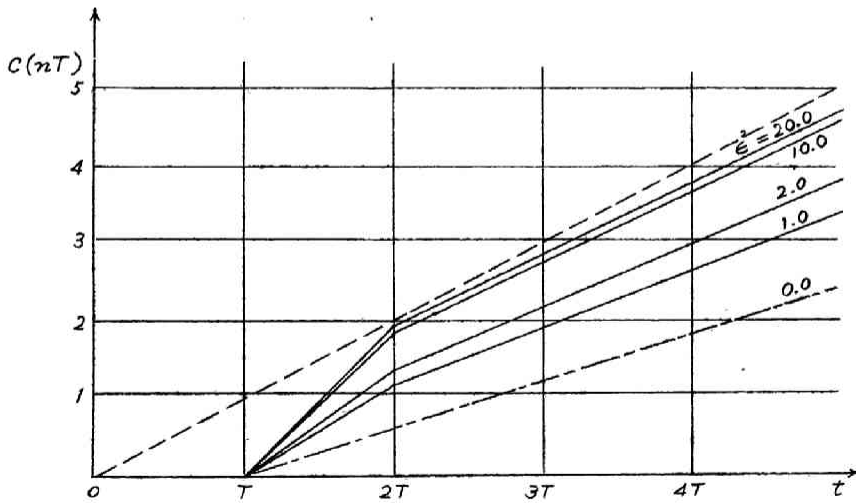
また加速度状入力に対して重みがかかる様

に設計した (2.5.14) 式に対して  $g=0.6$  及び  $g=0.9$  の場合について計算したインディシャル応答を第 2.5.6 図及び第 2.5.7 図に示す。第 2.5.



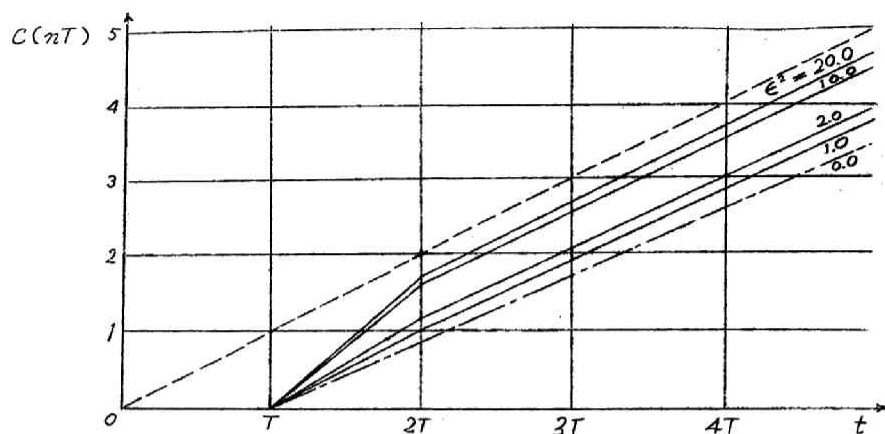
第 2.5.3 図

速度状入力に対して重みを考慮した場合のインディシャル応答 ( $g=0.9$ )



第 2.5.4 図

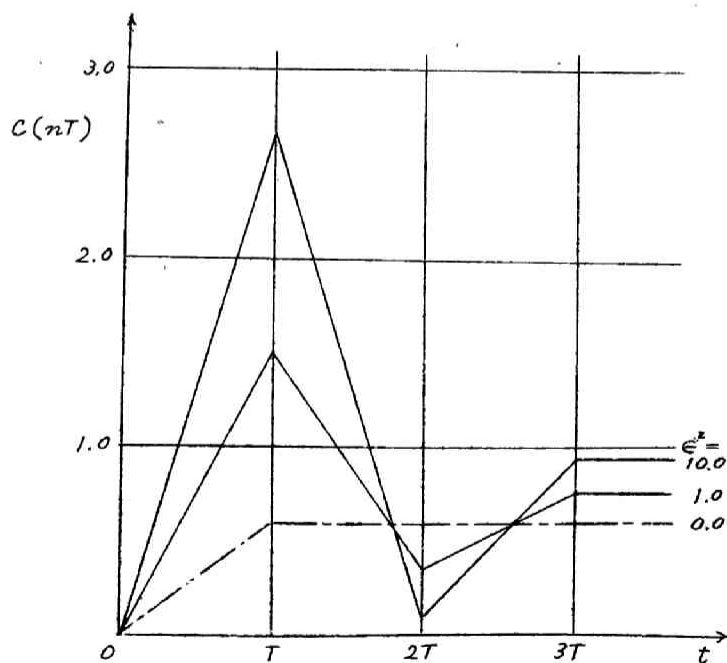
速度状入力に対して重みを考慮した場合の速度状入力に対する応答 ( $g=0.6$ )



第 2, 5, 5 図

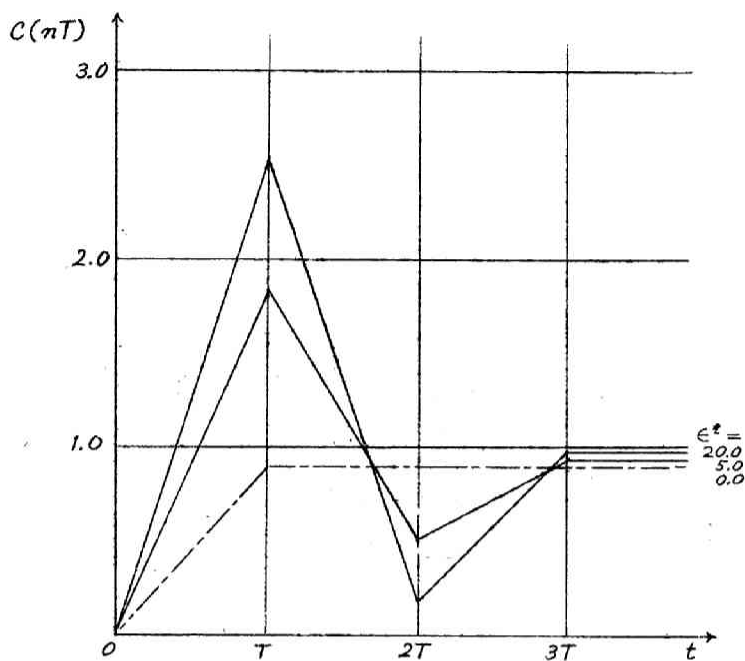
速度状入力に対して重みを考慮した場合の速度状入力に対する応答 ( $\zeta = 0.9$ )

8 図及び第 2, 5, 9 図は  $\zeta = 0.6$  及び  $\zeta = 0.9$  の場合の速度状入力を対する応答を第 2, 5, 10 図及び第 2, 5, 11 図は  $\zeta = 0.6$  及び  $\zeta = 0.9$  の場合の加速度状入力に対する応答を示す。



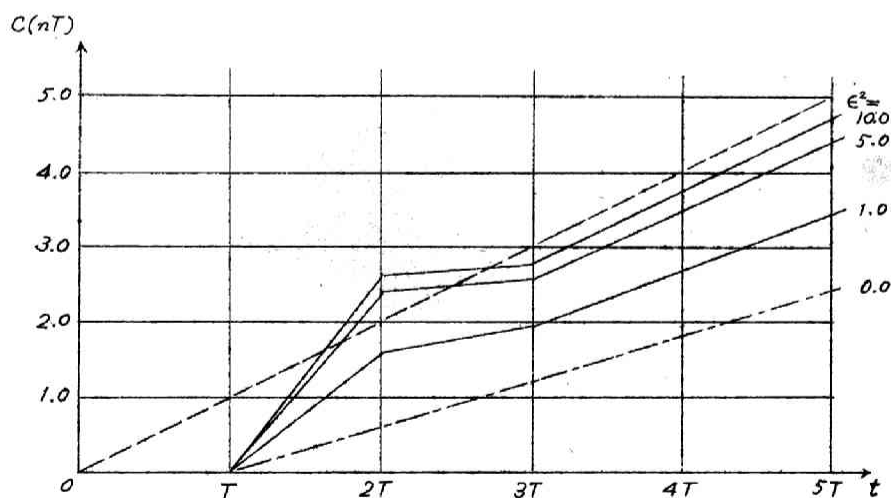
第 2, 5, 6 図

加速度状入力に対して重みを考慮した場合のインディシャル応答 ( $\zeta = 0.6$ )



第 2, 5, 7 図

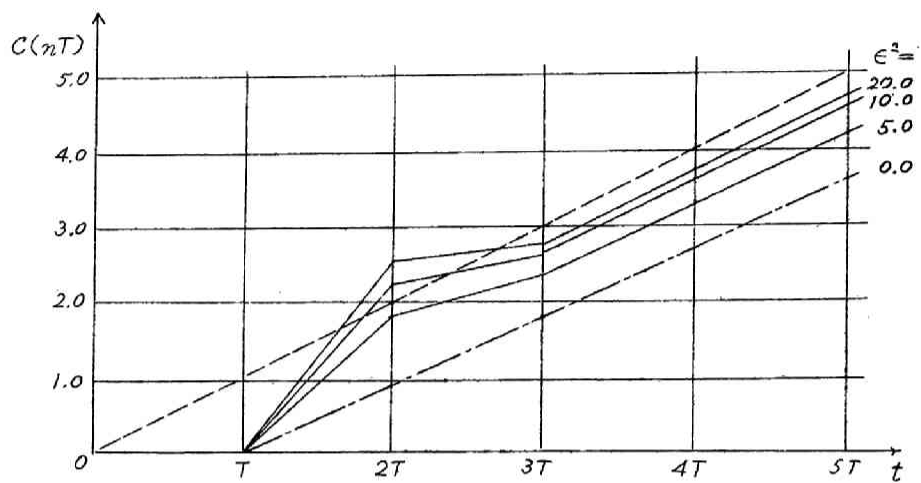
加速度状入力に対して重みを考慮した場合のインディシャル応答 ( $q = 0.9$ )



第 2, 5, 8 図

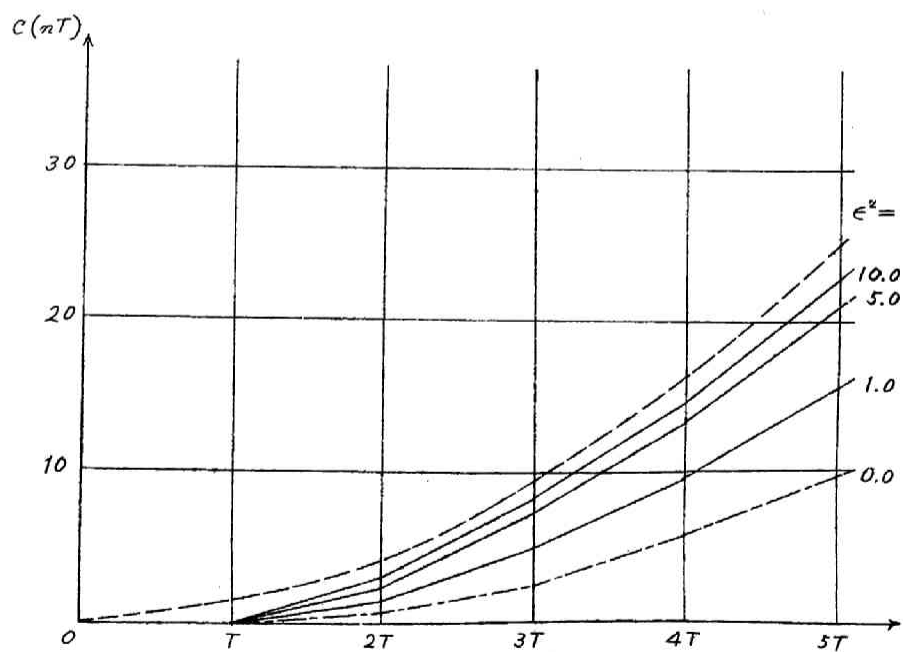
加速度状入力に対し重みを考慮した場合の速度状入力に対する応答 ( $q = 0.6$ )





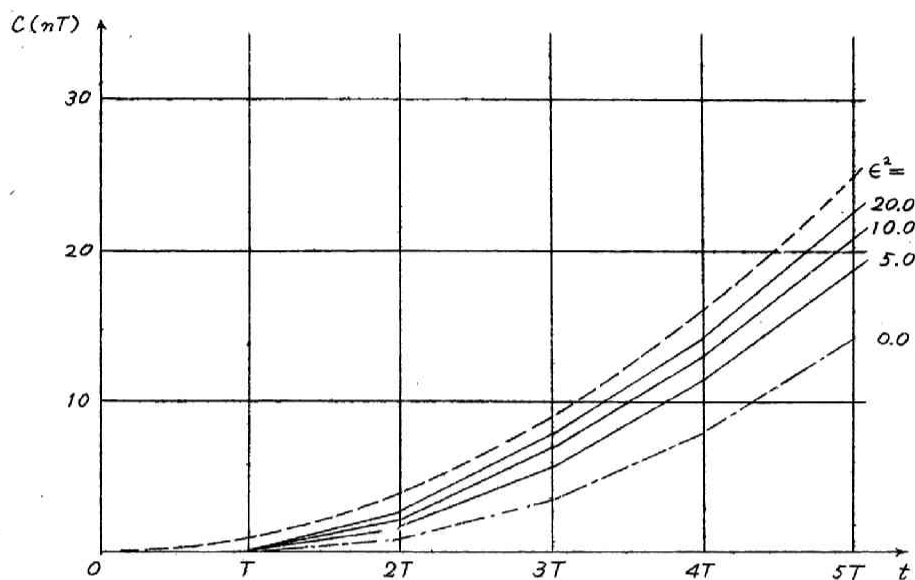
第 2, 5, 9 図

加速度状入力に対して重みを考慮した場合の加速度状入力に対する応答 ( $q = 0.9$ )



第 2, 5, 10 図

加速度状入力に対して重みを考慮した場合の加速度状入力に対する応答 ( $q = 0.6$ )



第 2, 5, 11 図

加速度状入力に対して重みを考慮した場合の加速度状入力に対する応答 ( $\eta = 0.9$ )

これらの結果からみて採用すべき重み関数  $f$  の形の選定が重要なることがわかる。

重み関数  $f$  については重みを減じているサンプル区間数も問題で、上の例題では単位階段状入力に対しては外乱の入った時点（サンプル点）1個だけの重みが減少し、次のサンプル点からは重みが回復する。サンプル点だけを対象とする場合であればこれでよいが、サンプル間の応答も問題にする場合には制御対象の特性によっては応答が良好でない場合もありうるために、この様な場合には重みを減ずるサンプル区間数を増加させなくてはならない。

## II. 重みの決定に関する考察

### 6 理論的考察

(2, 1, 2) 式、(2, 1, 3) 式に与えた様に重み関数  $f$  は常数  $\epsilon^2$  を含んでいるが、この  $\epsilon^2$  は重みの加わる程度を示すものであって、 $\epsilon^2$  が小さい場合は偏差の分散を対象とする場合に近づき、また  $\epsilon^2$  が大きくなりすぎると遂には極めて限られた時間内でのみ重みがかかる様になって好ましくない。 $\epsilon^2$  としては系が過渡的外乱に従っていると考えられる間だけ重みをおとし、過渡的外乱が終れば重みに加わる様に選定されるべきである。この場合に過渡的外乱にあたる部分やその際減少させるべき重みの大きさは経験に依存する部分が多いと考えられるが、理論的考察を行なうことも  $\epsilon^2$  決定の目安をつける材料となるものと考えられる。

簡単のために重み関数  $f$  としては (2, 4, 10) 式の形式、即ち

$$f(r_1, \dots, r_n) = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} \left( \sum_{i=1}^n b_i r_i \right)^2 \right] \quad (2, 4, 10)$$

に従う場合を考察する。ここで  $\left( \sum_{i=1}^n b_i r_i \right)$  の部分は前節においてとった様に制御系入力の時間的変化例えば変化速度 ( $b_1=1, b_2=-1$ )、変化加速度 ( $b_1=1, b_2=-2, b_3=1$ ) などを示すわけである。

便宜上

$$x \equiv \sum_{i=1}^n b_i r_i \quad (2, 6, 1')$$

とおけば (2, 4, 10) 式は

$$f(r_1, \dots, r_n) = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} x^2 \right] \quad (2, 6, 2)$$

と表わされる。さて、 $x$  の分散は (2, 6, 1) 式から

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j \overline{r_i r_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j \varphi_{rr}(T_i - T_j) \quad (2, 6, 3)$$

制御系入力  $x$  は前節で採用したと同様に、正規確率過程に従うものとするれば  $x$  もまた正規確率過程であり、その確率密度関数は (2, 6, 3) 式で与えられる分散  $\overline{x^2}$  を用いて、

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{x^2}}} \exp. \left[ -\frac{x^2}{2\overline{x^2}} \right] \quad (2, 6, 4)$$

と表わされる。また、(2, 6, 2) 式から重み関数  $f$  の確率密度関数  $g(f)$  は

$$g(f) = -2p(x) \frac{dx}{df} = \frac{2p(x)}{\epsilon^2 x f} \quad (x \geq 0) \quad (2, 6, 5)$$

が成立する。

この重み関数  $f$  の確率密度関数  $g(f)$  及び制御系入力の時間的变化を示す量  $x$  とその確率密度関数  $p(x)$  は  $\epsilon^2$  を決定する目安として役立つものと考えられる。

また重み関数  $f$  の分布を調べる際に確率密度関数  $g(f)$  の代りに分布関数  $G(f)$  を採用する方が有用であることも考えられる。

## 7 例題とその検討

制御系入力  $r$  の自己相関関数を

$$\varphi_{rr}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \quad (2, 7, 1)$$

とし、便宜上  $e^{-\alpha T} \equiv g$  ( $T$  はサンプル周期) とおくと (2, 6, 3) 式は、

(i) 制御系入力が一定に近づく程重みのます場合；  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = -1$

$$\overline{x^2} = (\overline{r_1 - r_2})^2 = 2\{1 - \varphi_{rr}(T)\} = 2(1 - g) \quad (2, 7, 2)$$

(ii) 制御系入力の時間的变化が一定に近づく程重みのます場合；  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = -2$ ,  $b_3 = 1$

$$\overline{x^2} = (\overline{r_1 - 2r_2 + r_3})^2 = 6 - 8\varphi_{rr}(T) + 2\varphi_{rr}(2T)$$

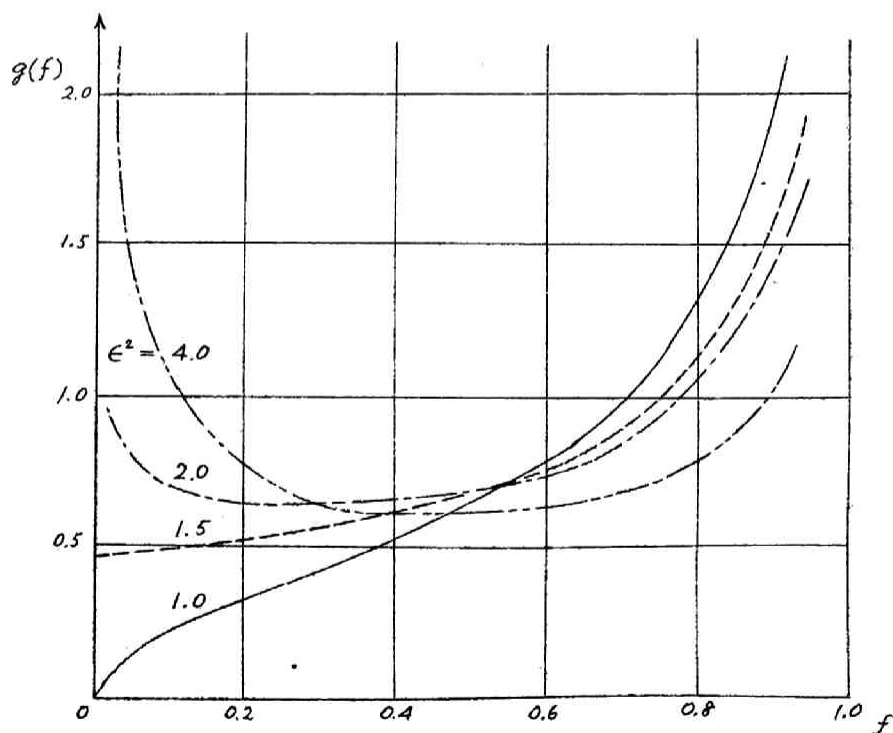
$$= 2(1-g)(3-g)$$

(2, 7, 3)

がえられる。これらの二式を用いると  $p(x)$  及び  $g(f)$  が求まる。

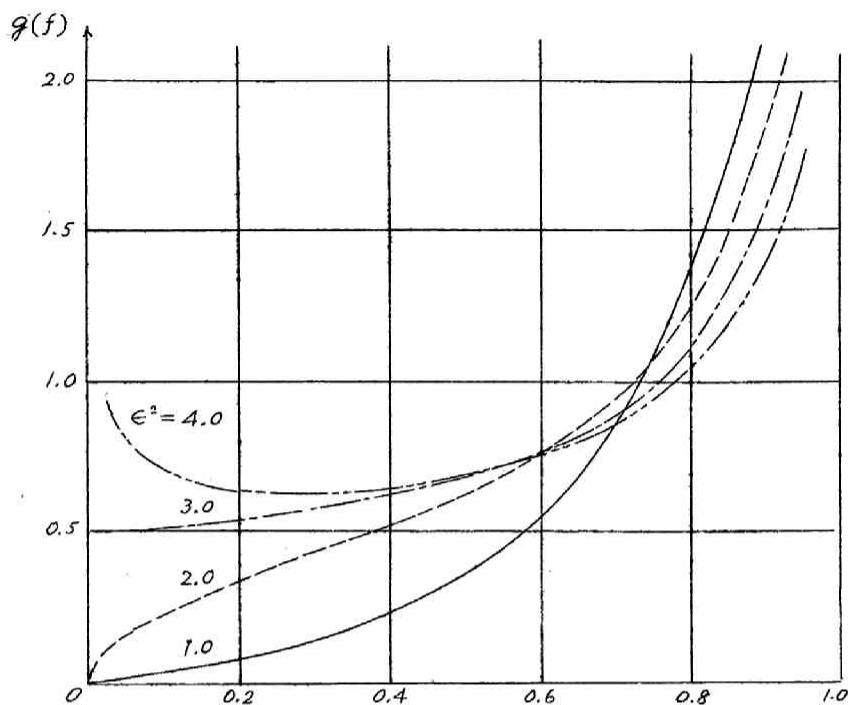
重み関数  $f$  とその確率密度関数  $g(f)$  との関係を (2, 7, 2) 式の場合について  $\epsilon^2$  をパラメタにしてえがいたものが第 2, 7, 1 図 ( $g=0.6$ ) 及び第 2, 7, 2 図 ( $g=0.8$ ) である。両者を比較すれば同一の  $\epsilon^2$  に対しては  $g$  が大きいほど重み  $f$  のかかっている時間領域が大きいことがわかる。

この様に  $g(f)$  と  $f$  との関係により、 $f$  なる重みの分布している割合はよくわかるが、 $f$  がある  $f_0$  なる値以下にある時間的割合即ち確率を問題とする場合には  $f$  の確率密度関数  $g(f)$  の代りにその分布関数  $G(f)$  を用いればよい。第 2, 7, 1 図及び第 2, 7, 2 図を各々  $f$  と分布関数  $G(f)$  との関係に書きあらためたものを 2, 7, 3 図及び第 2, 7, 4 図に



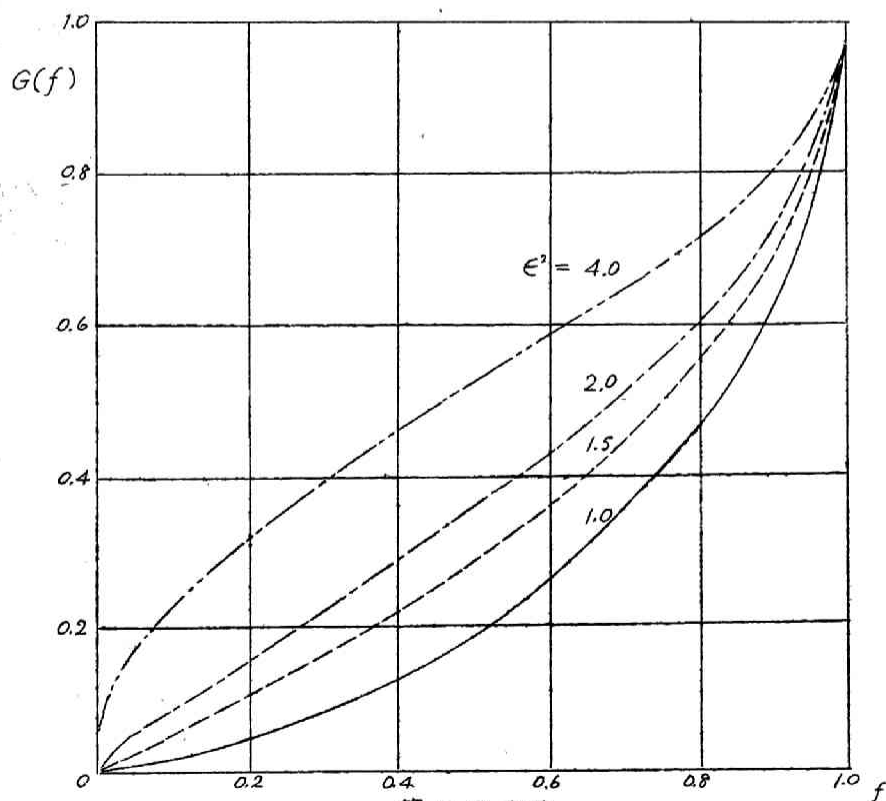
第 2, 7, 1 図

重み関数  $f$  とその確率密度関数  $g(f)$  との関係 ( $g=0.6$ )



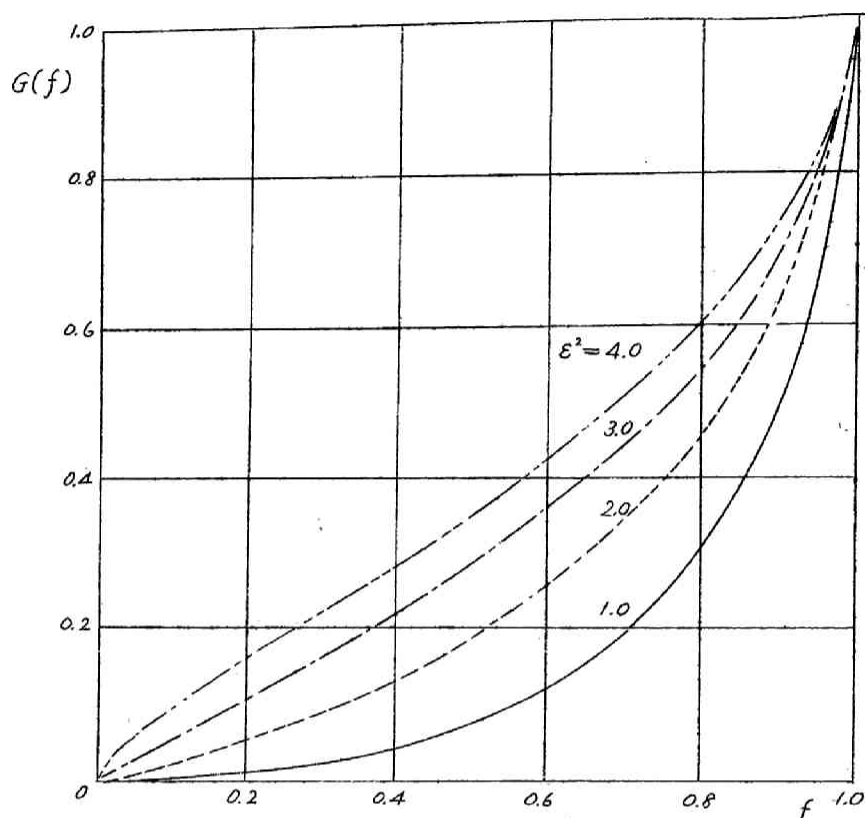
第 2, 7, 2 図

重み関数  $f$  とその確率密度関数  $g(f)$  との関係 ( $g=0.8$ )



第 2, 7, 3 図

重み関数  $f$  とその分布関数  $G(f)$  との関係 ( $g=0.6$ )



第 2, 7, 4 図

重み関数  $f$  とその分布関数  $G(f)$  との関係 ( $\varphi = 0.8$ )

示す。

一般に  $\epsilon^2$  が小さい程、大きい  $\omega$  に対しても重みがかかることになり、 $\epsilon^2$  が大きくなるにつれて大きい  $\omega$  に対しては早く重みがかゝらぬ様になる。実際には小さい  $\omega$  に対しては充分重みがかゝり、大きい  $\omega$  には重みが減する様な  $\epsilon^2$  を選定すべきである。

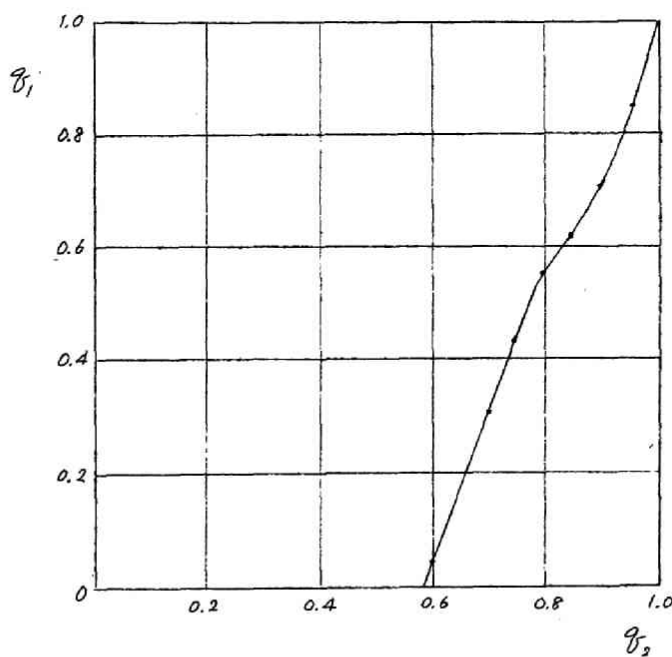
以上は (2, 7, 2) 式、即ち制御系入力が一常に近付くに従って重みを増加する様にした場合であるが、制御系入力の時間的变化が一常となるに従って重みを増す場合も (2, 7, 3) 式により同様に解析される。もし (2, 7, 2) 式の場合に種々の  $\varphi$  に対して解析しておけば (2, 7, 3) 式で与えられる  $\overline{\omega^2}$  と同一の  $\overline{\omega^2}$  を与える (2, 7, 2) 式の  $\varphi$  を求めることによって計算出来るから新たに (2, 7, 3) 式により計算しなおす必要

はない。

今、便宜上 (2.7.2) 式の  $q$  を  $q_1$ 、(2.7.3) 式の  $q$  を  $q_2$  と表わせは上記の議論より、

$$2(1-q_1) = 2(1-q_2)(3-q_2) \quad (2.7.4)$$

この関係を第 2.7.5 図に示す。これからみて今迄に解析した場合の  $q = 0.6$  及び  $q = 0.8$  なる場合は制御系入力の時間的変化が一定となると重みをかける場合にはほぼ  $q = 0.85$  及び  $q = 0.93$  に対する場合であることがわかる。



第 2.7.5 図



### Ⅲ. サンプル点以外の時点における応答をも 考慮した場合の解析<sup>(10)(11)</sup>

#### 8 緒 言

I においては、もっぱらサンプル点における応答にのみ注目し、サンプル点以外における制御系応答は全く無視して来た。しかし、サンプル点では良好な応答を示しても、かげの振動部分が大きい場合には良い制御系と云うことは出来ないから、サンプル点間での応答をも考慮して解析する必要があるものと考えられる。しかし解析上からみるとサンプル点だけを対象とする場合より複雑となるから、制御対象の特性によってはサンプル点における応答にのみ注目して設計して良い結果を与えることもあると考えられる。

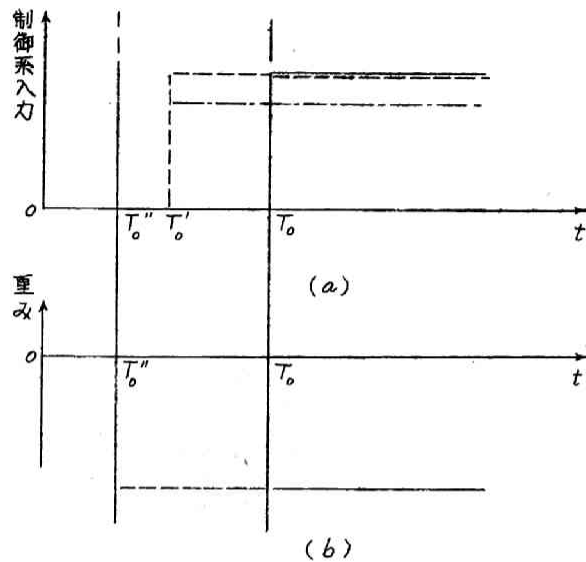
さて、サンプル点間における応答をも考慮する場合には、(2, 1, 1) 式に対応して重みを考慮した基準として、

$$I = f(r(T_0 - T_1), r(T_0 - T_2), \dots, r(T_0 - T_n)) \int_0^T e^2(T + mT) dm \quad (2, 2, 1)$$

を採用する。この場合、 $T_0, T_1, \dots, T_n$  の選定が問題である。今後簡単のために  $T_0, T_1, \dots, T_n$  はいずれもサンプル点に選ぶものとする。いま第 2, 2, 1 図 (a) の実線の様にサンプル点  $T_0$  において単位階段状入力加わったとすると、この場合には重みはサンプル点  $T_0$  からおとせば良い様に思われる。(同図 (b) 参照)

しかし単位階段状入力が  $T_0$  より / サンプル区間内の任意の時点  $T_0'$  において加わった場合には  $T_0'$  から  $T_0$  に至る迄の間は重みがかかることになる。このことは制御系出力が  $T_0$  以前においてすでに  $T_0'$  から  $T_0$  の間に生ずる偏差を少なくするために応動することを意味するもので、制御系の定常時の特性が悪化する原因となる。即ち、第 2, 2, 1 図 (a) に点線で示した様な入力加わった場合には制御系出力は、次の外乱に対し

て偏差を少なくする様に動作するため制御系出力は一点鎖線で示した様な低いレベル迄応動するにとどまる。この缺点を除去する方法としては第2, 8, 1図(b)に示すように  $T_0''$  点(サンプル点)において予じめ重みを落す必要がある。この結果として1サンプル区間だけ多く重みを落す様な( $T_0'', T_0$ 間の区間)基準を用いることが望まし



第2, 8, 1図  
制御系入力と重みの時間的变化

い。解析的にはより複雑となるのはやむをえない。

Jury, Schröder<sup>(12)</sup>はサンプル点間における応答をも考慮したサンプル値制御系の有限整定応答系の理論を発表したが、この理論の教えるサンプル区間数に加えて上記の1サンプル区間の間を(2, 8, 1)式の  $f$  なる関数により重みを減ずる様に設計する場合、極端に上記サンプル区間中は重みを零にしても Jury, Schröder の与えた有限整定応答系をうることはできない。これは I. においてザンブル点における応答だけに注目した場合に過渡時に重みを零にすることにより Bergen, Ragazzini の与えた有限整定応答系がえられたのとは異っている。その理由は、(2, 8, 1)式の如き重み関数  $f$  を用いることにより生じたものであり、 $f$  はサンプル点における制御系入力にのみ依存し、サンプル点間の制御系入力の変動には関係しないためである。しかしこの様な重み関数  $f$  は解析的には便利であるので以下重み  $f$  はサンプル点における制御系入力の値のみの関数であるとして取扱う。

制御系入力があり激しく変動しない場合には制御系入力はそのサンプル点における値によってよく表現されると考えられる。したがってかような場合、重み  $f$  はサンプル点における制御系入力の関数として表現しておいて充分であると考えられ、またこの様な場合には単位階段状入力などの既知の形の入力に対して、適当な区間数だけ重みを零とすることにより實際上 *Jury, Schröder* の与えた有限整定応答に非常に近い応答がえられる。

## 9 最適条件式とその解法

対象とする制御系は第 2, 2, 1 図で示されるものとする。サンプル点における制御系出力の  $z$  変換  $C(z)$  は、

$$C(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} R(z) \quad (2, 9, 1)$$

制御系全体の伝達関数  $K(z)$  は

$$K(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (2, 9, 2)$$

で与えられる。サンプル点間の応答をも対象とする場合には拡張  $z$  変換を用いる。制御系出力  $c(t)$  の拡張  $z$  変換  $C(z, m)$  は

$$C(z, m) = \frac{D(z)G(z, m)}{1 + D(z)G(z)} R(z) \quad (2, 9, 3)$$

制御系の伝達関数  $K(z, m)$  は

$$K(z, m) = \frac{C(z, m)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z, m)}{1 + D(z)G(z)} \quad (2, 9, 4)$$

さて  $I_1$  においてサンプル点における応答のみに注目した取扱いでは制御系のパルス伝達関数  $K(z)$  は、

$$K(z) = z^{-m'} P(z) H_2(z) \quad (2, 2, 2)$$

$$P(z) = \prod_{i=1}^l (1 - z/\alpha_i) \quad (2, 2, 3)$$

$$m' = m'' + l \quad (2, 2, 4)$$

によって与えた。ここに  $m''$  は制御対象の有する時間遅れ、 $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) は対象が有する単位円外の零点、 $H_2(z)$  は単位円内に極を有する  $z$  の関数である。

$K(z)$  が上記の諸条件を満足する場合に  $K(z, m)$  は次の形を有していないなくてはならない。

$$K(z, m) = H_1(z) G_2(z, m) \quad (2, 9, 5)$$

ただし  $G_2(z, m)$  は制御対象の拡張  $z$  変換  $G(z, m)$  の分子である。即ち

$$G(z, m) = \frac{G_2(z, m)}{G_1(z)} \quad (2, 9, 6)$$

また  $H_1(z)$  は単位円内にのみ極を有する任意の関数である。従って最適な制御系を決定することは基準 (2, 8, 1) 式を最小にする様な関数  $H_1(z)$  を決定することに帰着する。

いま制御系入力  $r(t)$  の拡張  $z$  変換  $R(z, m)$ 、制御系偏差  $e(t)$  の拡張  $z$  変換を  $E(z, m)$  とすると、

$$\begin{aligned} E(z, m) &= R(z, m) - K(z, m) R(z) \\ &= R(z, m) - H_1(z) G_2(z, m) R(z) \end{aligned} \quad (2, 9, 7)$$

の関係が成立する。ここで時間領域で考察するため  $z^{-(n+1)}$  の係数を調べると

$$e(nT + mT) = r(nT + mT) - \sum_{k=0}^{\infty} h_k(kT + mT) r(nT + kT) \quad (2, 9, 8)$$

ただし関数  $h_k(kT + mT)$  は

$$H_1(z) G_2(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} h_k(kT + mT) z^{-k} \quad (2, 9, 9)$$

により定義される。

(2, 9, 8) 式で定常成分のみ考察する場合には、

$$e(nT+mT) = r(nT+mT) - \sum_{k=0}^{\infty} h_k(kT+mT) r(nT+kT) \quad (2, 9, 10)$$

従って上式を二乗し、基準(2, 8, 1)式に用いると、

$$\begin{aligned} I = & \int_0^T dm \overline{f(r(T_0-T_1), \dots, r(T_0-T_n))} e^2(T_0+mT) \\ & + \int_0^T dm \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} h_k(kT+mT) h_{k'}(k'T+mT) W_{k,k'} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{k=0}^{\infty} h_k(kT+mT) W_{-m,k} \right] \quad (2, 9, 11) \end{aligned}$$

をうる。ただし一般に  $W_{k,k'}$  は(2, 2, 10)式で与えられる。即ち

$$W_{k,k'} = \overline{f(r(T_0-T_1), \dots, r(T_0-T_n))} r(T_0-kT) r(T_0-k'T) \quad (2, 9, 12)$$

従って問題は適当な関数  $h$  の選定によって(2, 9, 11)式を最小ならしめることである。このためには  $I$  において行なったと同様に  $h$  の変分を零とおけばよい。

ここで制御系入力は正規確率過程に従うものと仮定して  $W_{k,k'}$  として(2, 2, 17) 式の関係を用い、

$$H_1(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} h_1(\alpha T) z^{-\alpha} \quad (2, 9, 12)$$

$$G_2(z, m) = z^{-1} \sum_{\beta=0}^N g_2(\beta T+mT) z^{-\beta} \quad (2, 9, 13)$$

により  $h_1(\alpha T)$  及び  $g_2(\beta T+mT)$  を定義すると所要の最適条件式として、

$$\sum_{l'=0}^{\infty} h_1(l'T) \zeta'(l-l') = K'(l) \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (2, 9, 14)$$

がえられる。これはサンプリング点における応答のみに注目した場合における(2, 3, 6) 式に対応する関係式である。ただし

$$\zeta'(l-l') = \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\alpha'=0}^N \left\{ \int_0^T g_2(\alpha'+mT) g_2(\alpha+mT) dm \right\} \varphi_{rr}(\alpha+l-\alpha'-l'T) \quad (2, 9, 15)$$

$$\begin{aligned}
K'(\ell) = & \sum_{\alpha=0}^N \left\{ \int_0^1 g_2(\overline{\alpha+m}T) \varphi_{rr}(\overline{m+\alpha+\ell}T) dm \right\} \\
& + \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\overline{f_{ij}}}{\overline{f}} \right) \sum_{\alpha=0}^N \left\{ \int_0^1 g_2(\overline{\alpha+m}T) \varphi_{rr}(mT+T_i) dm \right\} \\
& \times \varphi_{rr}(\overline{\alpha+\ell}T-T_j) - \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\overline{f_{ij}}}{\overline{f}} \right) \sum_{\ell'=0}^{\infty} h_1(\ell'T) \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\alpha'=0}^N \left\{ \int_0^1 g_2(\overline{\alpha+m}T) \right. \\
& \times g_2(\overline{\alpha'+m}T) dm \left. \right\} \varphi_{rr}(\overline{\alpha+\ell}T-T_i) \varphi_{rr}(\overline{\alpha'+\ell'}T-T_j) \quad (2, 9, 16)
\end{aligned}$$

以下の解析は  $I$  で行ったと同じ手順を進める。即ち、関数  $\zeta'$  の  $z$  変換を  $Z'(z)$  とすると、

$$Z'(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \zeta'(\ell) z^{-\ell} = W_0(z) \left\{ \int_0^1 |G_2(z, m)|^2 dm \right\} \quad (2, 9, 17)$$

がえられる。ただし  $W_0(z)$  は (2, 3, 16) 式で与えられるもので

$$W_0(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi_{rr}(\ell T) z^{-\ell} \quad (2, 3, 16)$$

次に時点  $T_i (i=1, 2, \dots, n)$  は

$$T_i = (i-1)T \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2, 9, 17)$$

とし、いずれもサンプル点にくる様にする。(  $T$  はサンプル周期)

$K'(\ell)$  の  $z$  変換を  $L'(z)$  とすると

$$\begin{aligned}
L'(z) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} K'(\ell) z^{-\ell} \\
&= L_1(z) - z W_0(z) \sum_j z^j \psi(j) \quad (2, 9, 18)
\end{aligned}$$

がえられる。こゝで、

$$\begin{aligned}
L_1(z) &= \int_0^1 G_2(z^{-1}, m) W_0(z, m) dm \\
&+ \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\overline{f_{ij}}}{\overline{f}} \right) z^{-i} W_0(z) \int_0^1 G_2(z^{-1}, m) \varphi_{rr}(\overline{m+j-1}T) dm \quad (2, 9, 19)
\end{aligned}$$

$$W_0(z, m) = z^{-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi_{rr}(\overline{\ell+m}T) z^{-\ell} \quad (2, 9, 20)$$

$$\psi(s) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right) \int_0^1 g_2(\overline{i+s+m}T) \left\{ \sum_{\alpha'=0}^N g_2(\overline{\alpha'+m}T) \cdot Q(\alpha'-j+1) \right\} dm \quad (2, 9, 21)$$

$$Q(x) = \sum_{l'=0}^{\infty} h_{l'}(l'T) \varphi_{rr}(\overline{l'+x}T) \quad (2, 9, 22)$$

$\psi(s)$  は  $x$  を含まない常数である。また (2, 9, 21) 式では一般に  $g_2(\overline{\alpha+m}T)$  なる関数は  $\alpha > N$  及び  $\alpha < 0$  で零とすべきことに注意を要する。

重みの効果を全く考慮せぬ場合は (2, 9, 19) 式から

$$L'(z) = \int_0^1 G_2(z^{-1}, m) W_0(z, m) dm \quad (2, 9, 23)$$

(2, 9, 14) 式は (2, 9, 17) 式の  $Z'(z)$  及び (2, 9, 19) 式の  $L'(z)$  により

$$H_1(z) Z'(z) - L'(z) = z V'(z) \quad (2, 9, 24)$$

がえられる。これは (2, 3, 14) 式に対応する。 $W_0(z)$  は (2, 3, 17) 式の如く

$$W_0(z) = Y(z) Y(z^{-1}) \quad (2, 3, 17)$$

と分解する。たゞし  $Y(z)$  は極及び零点を単位円内にのみ、また  $Y(z^{-1})$  は極及び零点を単位円外にのみ有する。また  $\int_0^1 |G_2(z, m)|^2 dm$  を

$$\int_0^1 |G_2(z, m)|^2 dm = P'(z) P'(z^{-1}) \quad (2, 9, 25)$$

と分解する。たゞし  $P'(z)$  は極及び零点を単位円外に有する部分、 $P'(z^{-1})$  は極及び零点を単位円内に有する部分とする。この  $P'(z)$ ,  $P'(z^{-1})$  は I. の場合における  $P(z)$ ,  $P(z^{-1})$  に対応する。従って  $H_1(z)$  は

$$H_1(z) = \frac{z Q_{in}'(z)}{P'(z^{-1}) Y(z)} \quad (2, 9, 26)$$

たゞし  $Q_{in}'(z)$  は

$$Q'(z) = \frac{L'(z) z^{-1}}{P'(z) Y(z^{-1})} \quad (2, 9, 27)$$

のうち単位円内にのみ極を有する部分である。(2, 9, 18) 式を用いると

$$Q'_{in}(z) = Q'^{*}_{in}(z) - \sum_{\delta} Q'^{*}_{1\delta}(z) \psi(\delta) \quad (2, 9, 28)$$

ただし  $Q'^{*}_{in}(z)$ ,  $Q'^{*}_{1\delta}(z)$  は各々  $Q'_i(z)$ ,  $Q'_{1\delta}(z)$  の単位円内にのみ極を有する部分である。ここで  $Q'_i(z)$ ,  $Q'_{1\delta}(z)$  は

$$Q'_i(z) = \frac{L_i(z) z^{-1}}{P'(z) Y(z^{-1})} \quad (2, 9, 29)$$

$$Q'_{1\delta}(z) = \frac{Y(z) z^{\delta}}{P'(z)} \quad (2, 9, 30)$$

で与えられる。(2, 9, 28) 式を (2, 9, 26) 式に用いて、

$$H_i(z) = \frac{z}{P'(z^{-1}) Y(z)} \left[ Q'^{*}_{in}(z) - \sum_{\delta} Q'^{*}_{1\delta}(z) \psi(\delta) \right] \quad (2, 9, 31)$$

(2, 9, 5) 式を用いると制御系全体のパルス伝達関数  $K(z, m)$  は

$$K(z, m) = \frac{z G_2(z, m)}{P'(z^{-1}) Y(z)} \left[ Q'^{*}_{in}(z) - \sum_{\delta} Q'^{*}_{1\delta}(z) \psi(\delta) \right] \quad (2, 9, 32)$$

として求められる。ただし上式は未知常数  $\psi(\delta)$  を含むためこれを決定しなくてはならない。これには種々の方法が考えられるが、(2, 9, 31) 式を (2, 9, 11) 式に用い、これを最小とする様に決定するのが簡単な様である。その解析の過程は省略するが、 $H_i(z)$  を確定するに必要な未知常数を  $p_i$  とおけば (これは必ずしも  $\psi(\delta)$  と一致する必要はない)、 $p_i$  を決定する方程式として次の関係がえられる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \oint H_i(z) \frac{\partial H_i(z^{-1})}{\partial p_i} p'(z) p'(z^{-1}) \frac{W_0(z^{-1})}{z} dz \\ & + \left( \frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint \oint \left( \int_0^1 G_2(z, m) G_2(v, m) dm \right) H_i(z) \frac{\partial H_i(v)}{\partial p_i} W^*(z, v) dz dv \\ & = \frac{1}{2\pi j} \oint L_i(z^{-1}) \frac{\partial H_i(z)}{\partial p_i} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (2, 9, 33)$$

ただし積分路は単位円上にとるものとし、また  $W^*(z, v)$  は

$$W^*(z, v) \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} z^l v^{l'} \sum_{ij=1}^n \varphi_{rr}(\overline{l-(i-1)T}) \varphi_{rr}(\overline{l'-(j-1)T}) \left( \frac{f_{ij}}{f} \right)$$

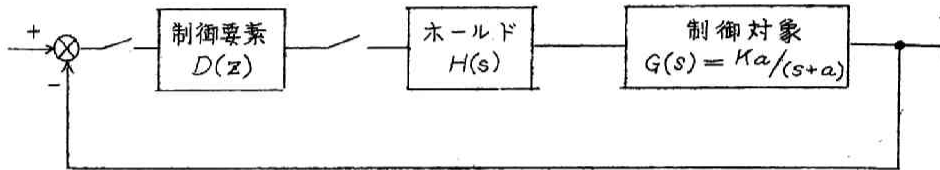
(2, 9, 34)

で与えられる。



## 10 例題とその検討

第 2, 10, 1 図に示す様な制御系について考察する。制御対象は 1 次おくれ特性を有するものとする。



第 2, 10, 1 図  
例題に用いたサンプル値制御系

そのホールド回路を含めた伝達関数は

$$H(s)G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{Ka}{s+a} \quad (2, 10, 1)$$

その  $z$  変換は

$$G(z) = \frac{K(1-e^{-aT})z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}} \quad (2, 10, 2)$$

便宜上

$$e^{-aT} \equiv h \quad (2, 10, 3)$$

とおくと  $G(z)$  の分母  $G_1(z)$ , 分子  $G_2(z)$  は

$$G_1(z) = 1 - h z^{-1} \quad (2, 10, 4)$$

$$G_2(z) = K(1-h)z^{-1} \quad (2, 10, 5)$$

また  $G(z)$  の拡張  $z$  変換  $G(z, m)$  の分子は

$$G_2(z, m) = K z^{-1} [(1-h^m) + (h^m - h)z^{-1}] \quad (2, 10, 6)$$

制御系入力の自己相関関数  $\varphi_{rr}(\tau)$  が

$$\varphi_{rr}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (2, 10, 7)$$

と表わされるものとする、

$$W_0(z) = \frac{(1-q^2)}{(1-z^{-1}q)(1-zq)} \quad (2, 10, 8)$$

ただし

$$q \equiv e^{-\alpha T} \quad (2, 10, 9)$$

である。 $Y(z)$ ,  $Y(z^{-1})$ は

$$Y(z) = \frac{\sqrt{1-q^2}}{1-z^{-1}q} \quad (2, 10, 10)$$

$$Y(z^{-1}) = \frac{\sqrt{1-q^2}}{1-zq} \quad (2, 10, 11)$$

で与えられる。制御系入力の自己相関関数の拡張  $z$  変換  $W_0(z, m)$  は

$$W_0(z, m) = z^{-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi_{rr}(\overline{\ell+m} T) z^{-\ell} = \frac{(q^m - q^{2-m}) + z(q^{1-m} - q^{1+m})}{z(1-z^{-1}q)(1-zq)} \quad (2, 10, 12)$$

(2, 9, 19) 式の  $L(z)$  について考察すると、この第 1 項は (2, 10, 6) 式と (2, 10, 12) 式とから

$$\int_0^1 G_2(z^{-1}, m) W_0(z, m) dm = \frac{K(A_0 + A_1 z + A_2 z^2)}{(1-z^{-1}q)(1-zq)} \quad (2, 10, 13)$$

ただし

$$A_0 = \frac{1}{\alpha T} (1-q)^2 - \frac{1}{(a+\alpha)T} (1-hq) - \frac{q}{(a+\alpha)T} (h-q) \quad (2, 10, 14)$$

$$A_1 = \frac{1}{\alpha T} (1-q)^2 (1-h) + \frac{1}{(a+\alpha)T} (1+q)(1-hq) + \frac{1}{(a+\alpha)T} (h-q)(1-q) \quad (2, 10, 15)$$

$$A_2 = -\frac{1}{\alpha T} h(1-q)^2 - \frac{q}{(a+\alpha)T} (1-hq) - \frac{1}{(a-\alpha)T} (h-q) \quad (2, 10, 16)$$

$L(z)$  の第 2 項は先ず (2, 10, 6) 式と (2, 10, 7) 式により積分を計算して

$$\sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right) z^{-i} W_0(z) \int_0^1 G_2(z^{-1}, m) \varphi_{rr}(\overline{m+j-1} T) dm$$

$$= \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right) z^{-i} W_0(z) K_z(B_0 + B_1 z) q^{(j-1)} \quad (2, 10, 17)$$

ただし

$$B_0 = \frac{1}{\alpha T} (1-q) - \frac{1}{(\alpha+\alpha)T} (1-hq) \quad (2, 10, 18)$$

$$B_1 = \frac{1}{(\alpha+\alpha)T} (1-hq) - \frac{h}{\alpha T} (1-q) \quad (2, 10, 19)$$

ここで  $W_0(z)$  として (2, 10, 8) 式を用い、 $\left( \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right)$  としては I. で行った解析結果を用いる。

重み  $f$  として制御系入力が一定に近づく程重みのます形として、

$$f = \exp \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} \{ r(T_0) - r(T_0 - T) \}^2 \right] \quad (2, 10, 20)$$

を採用すれば

$$\left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right] = -\frac{\epsilon^2}{1+2(1-q)\epsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2, 10, 21)$$

がえられる。これを (2, 10, 17) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \sum_{ij=1}^n \left( \frac{\bar{f}_{ij}}{f} \right) z^{-i} W_0(z) \int_0^1 G_2(z^{-1}, m) \varphi_{rr}(\overline{m+j-1}T) dm \\ &= \frac{K\epsilon^2(1-q)}{1+2(1-q)\epsilon^2} \cdot \frac{(1-q^2)(1-z^{-1})(B_0+B_1z)}{(1-z^{-1}q)(1-zq)} \end{aligned} \quad (2, 10, 22)$$

$L_1(z)$  は (2, 10, 13) 式と (2, 10, 22) 式とから求められる。即ち、

$$L_1(z) = K \frac{D_2 z^2 + D_1 z + D_0 + D_{-1} z^{-1}}{(1-z^{-1}q)(1-zq)} \quad (2, 10, 23)$$

$$D_2 = A_2 \quad (2, 10, 24)$$

$$D_1 = A_1 - C_0 B_1 \quad (2, 10, 25)$$

$$D_0 = A_0 - C_0 (B_0 - B_1) \quad (2, 10, 26)$$

$$D_{-1} = C_0 B_0 \quad (2, 10, 27)$$

$$C_0 = \frac{\epsilon^2(1-q)(1-q^2)}{1+2(1-q)\epsilon^2} \quad (2, 10, 28)$$

次に (2, 10, 6) 式を用いると

$$\int_0^1 |G_2(z, m)|^2 dm = K^2 [E_0 + E_1 z + E_1 z^{-1}] \quad (2, 10, 29)$$

ただし

$$E_0 = (1 + h^2) - \frac{1}{aT} (1 - h^2) \quad (2, 10, 30)$$

$$E_1 = -h + \frac{1}{(2aT)} (1 - h^2) \quad (2, 10, 31)$$

(2, 10, 29) 式を (2, 9, 25) 式の様に分解すると

$$P'(z) = K'(1 + F_1 z) \quad (2, 10, 32)$$

$$P'(z^{-1}) = K'(1 + F_1 z^{-1}) \quad (2, 10, 33)$$

ここで  $P'(z)$ ,  $P'(z^{-1})$  の定義により  $F_1$  の絶対値は 1 より小さい様に送られる。(2, 10, 32), (2, 10, 33), (2, 10, 29) 三式から次の関係がえられる。即ち、

$$\xi = \frac{E_0}{2E_1} \quad (2, 10, 34)$$

により  $\xi$  を定義すれば  $F_1$  は

$$F_1 = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2, 10, 35)$$

また  $K'$  は

$$K' = K \sqrt{\frac{E_1}{F_1}} \quad (2, 10, 36)$$

により決定される。 $Q'_1(z)$  は (2, 9, 29) 式より、

$$Q'_1(z) = \frac{L'_1(z) z^{-1}}{P'(z) Y(z^{-1})} = K'' \frac{D_2 z + D_1 + D_0 z^{-1} + D_{-1} z^{-2}}{(1 - z^{-1} q)(1 - z q)} \quad (2, 10, 37)$$

ただし

$$K'' = \frac{K}{K' (1 - q^2)} \quad (2, 10, 38)$$

次に (2, 10, 37) 式から極を単位円内にのみ有する部分  $Q_{1,2}^{*,*}(z)$  を分離すると、

$$Q_{1,2}^{*,*}(z) = K'' \left[ \frac{I_1}{z} + \frac{I_2}{z - q} \right] \quad (2, 10, 39)$$

ただし

$$I_1 = -\frac{D_{-1}}{q} \quad (2, 10, 40)$$

$$I_2 = \frac{D_2 q^2 + D_1 q + D_0 + D_{-1} q^{-1}}{(1 + F_1 q)} \quad (2, 10, 41)$$

次に  $Q_{1,0}^{*,*}(z)$  は

$$Q_{1,0}^{*,*}(z) = K''' \frac{z^{d+1}}{(z - q)(1 + F_1 z)} \quad (2, 10, 42)$$

ただし

$$K''' = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{K'} \quad (2, 10, 43)$$

$Q_{1,2}^{*,*}(z)$  は (2, 10, 42) 式から極を単位円内にのみ有する部分を取り出すことにより、

$$Q_{1,-2}^{*,*}(z) = K''' \left[ \frac{J_1}{z} + \frac{J_2}{z - q} \right] \quad (2, 10, 44)$$

$$Q_{1,-1}^{*,*}(z) = K''' \frac{q J_2}{z - q} \quad (2, 10, 45)$$

$$Q_{1,0}^{*,*}(z) = \frac{q^2 J_2}{z - q} \quad (2, 10, 46)$$

ただし、

$$J_1 = -\frac{1}{q} \quad (2, 10, 47)$$

$$J_2 = \frac{1}{q(1 + F_1 q)} \quad (2, 10, 48)$$

(2, 10, 37), (2, 10, 44), (2, 10, 45), (2, 10, 46), (2, 10, 33) の諸式を用いると (2, 9, 31) 式で与えられる  $H_1(z)$  は、

$$H_1(z) = \frac{(p_1 - p_2 z^{-1})}{K' \sqrt{1 - q^2} (1 + F_1 z^{-1})} \quad (2, 10, 49)$$

ここで  $p_1, p_2$  は常数で次式で与えられる。

$$p_1 = K''(I_1 + I_2) - K''' \{ \psi(-2)(J_1 + J_2) + \psi(-1)qJ_2 + \psi(0)q^2J_2 \} \quad (2, 10, 50)$$

$$p_2 = K''I_1q - K''' \psi(-2)J_1q \quad (2, 10, 51)$$

従って所要の制御系パルス伝達関数  $K(z, m)$  は、

$$K(z, m) = K' \frac{z^{-1}(p_1 - p_2 z^{-1}) [(1 - h^m) + (h^m - h)z^{-1}]}{(1 + F_1 z^{-1})} \quad (2, 10, 52)$$

所要の制御装置のパルス伝達関数  $D(z)$  は

$$D(z) = \frac{H_1(z)G_1(z)}{1 - H_1(z)G_2(z)} \quad (2, 10, 53)$$

なる関係を用いて

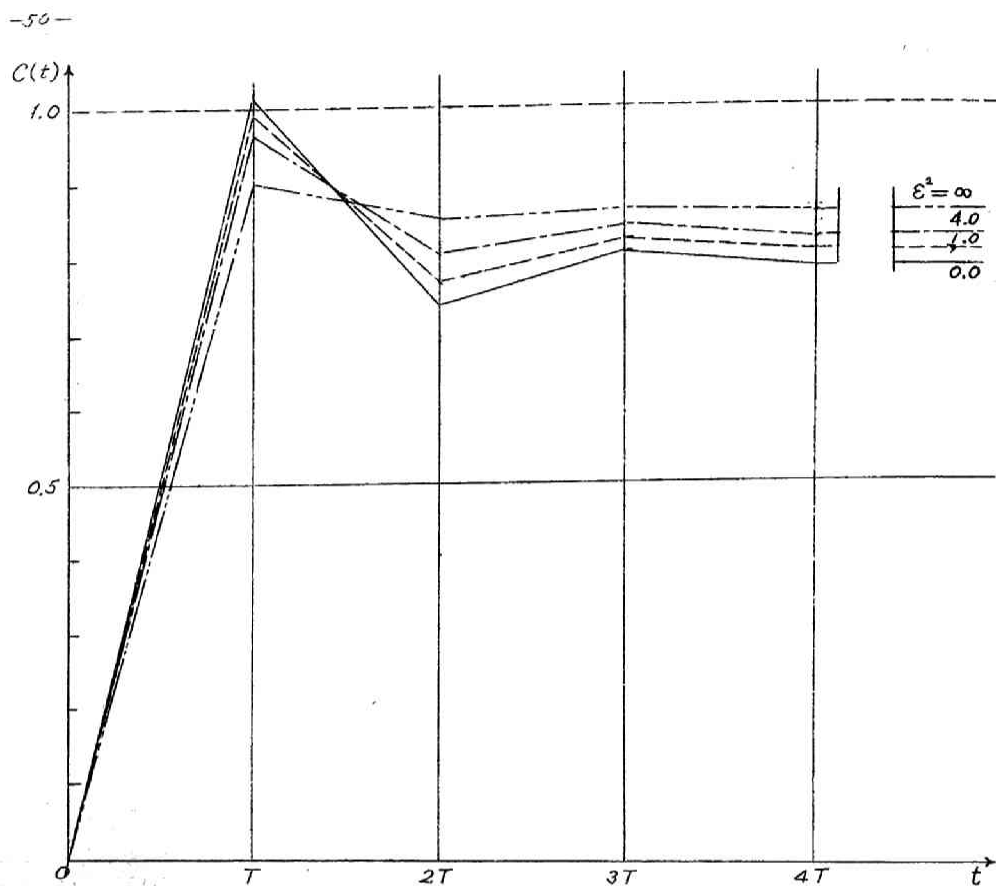
$$D(z) = \frac{(p_1 - p_2 z^{-1})(1 - h z^{-1})}{K' \sqrt{1 - q^2} [1 + \{F_1 - K''(1 - h)p_1\}z^{-1} + K''(1 - h)p_2 z^{-2}]} \quad (2, 10, 54)$$

がえられる。未定常数  $p_1, p_2$  は基準  $I$  を最小にする様に決定される。

上記の解析にもとづいて計算した結果を第 2, 10, 2 図, 第 2, 10, 3 図に示す。

第 2, 10, 2 図は  $\alpha T = 0.2$ ,  $\alpha T = 0.3$  ( $h \equiv e^{-\alpha T} = 0.8187$ ,  $q \equiv e^{-\alpha T} = 0.7408$ ) の場合である。 $\epsilon^2$  を大きくして行くと応答の過渡的振動は減少し、定常特性も良好となることが認められるが、制御系入力の値 1.0 には到達しないでかなり低い値となる。この原因は [8] において記した様にサンプル点間で生ずる制御系入力の変動に対し、次のサンプル点迄の間、重みがかかるので、この変動を予知し、偏差を減少するために予じめ応答を低下するように制御系が設計されるためである。しかし  $q$  が 1 に近づき、制御系入力が急激に変動せぬ場合には上記の悪影響は少なくなる。

$h$  は前の様に 0.8187 とし  $q$  を 0.99005 ( $\alpha T = 0.01$ ) とした場合



$\alpha T = 0.2$ ,  $\alpha T = 0.3$  の場合の制御系応答

を第 2, 10, 3 図に示す。

$\epsilon^2 \rightarrow \infty$  とすれば、ほとんど有限整定応答を示す。正確な応答の値 (サンプル点) は

$$C(0) = 0$$

$$C(T) = 0.9949$$

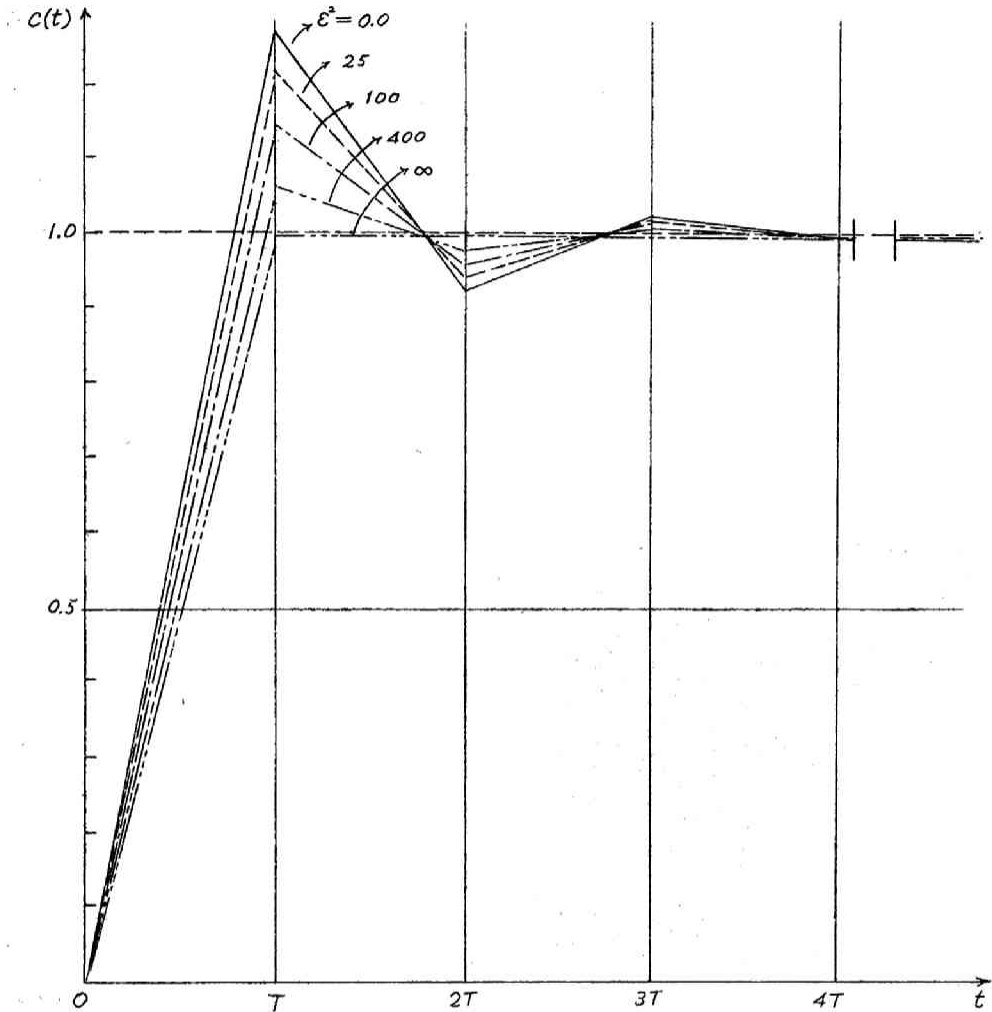
$$C(2T) = 0.9945$$

$$C(\infty) = 0.9946$$

となっている。また操作量  $E_2(z)$  は

$$E_2(z) = \frac{C(z)}{G(z)}$$

(2, 10, 55)



第 2, 10, 3 図

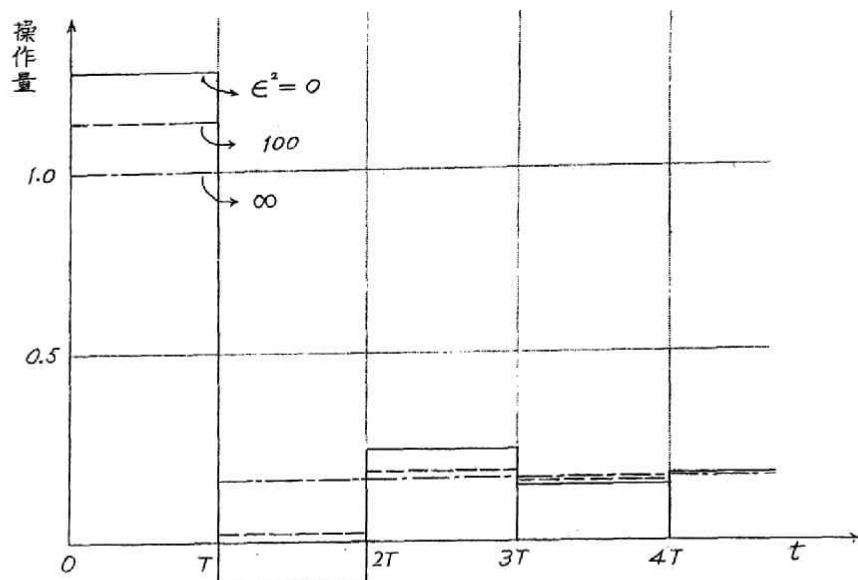
$\alpha T = 0.2, \alpha T = 0.01$  の場合の制御系応答

として求められる。第 2, 10, 3 図の場合の操作量の時間的变化を第 2, 10, 4 図に示す。

さて [8] にも記した様に  $g$  が 1 より小さくなるにつれて表われる定常特性の悪化の現象は重みを外乱が入る前に減ずることにすれば避けられる。この目的にそうように重み関数  $f$  をえらぶと、

$$f = \exp. \left[ -\frac{\epsilon^2}{2} \{ r(T_0 + T) - r(T_0 - T) \}^2 \right] \quad (2, 10, 56)$$

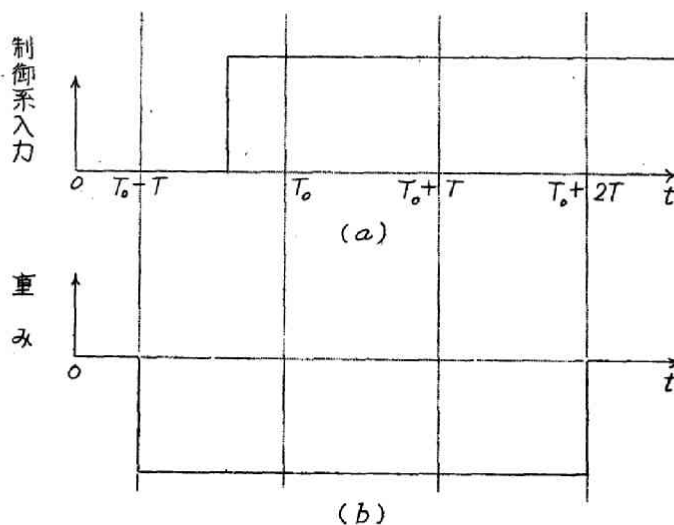




第 2, 10, 4 図

$aT=0.2$ ,  $\alpha T=0.01$  の場合 (第 2, 10, 3 図) の操作量の時間的变化

が最も簡単なものであろう。制御系に第 2, 10, 5 (a) 図に示す様な単位階段状入力加わったと仮定すれば、重みは同図 (b) の様に変化する。



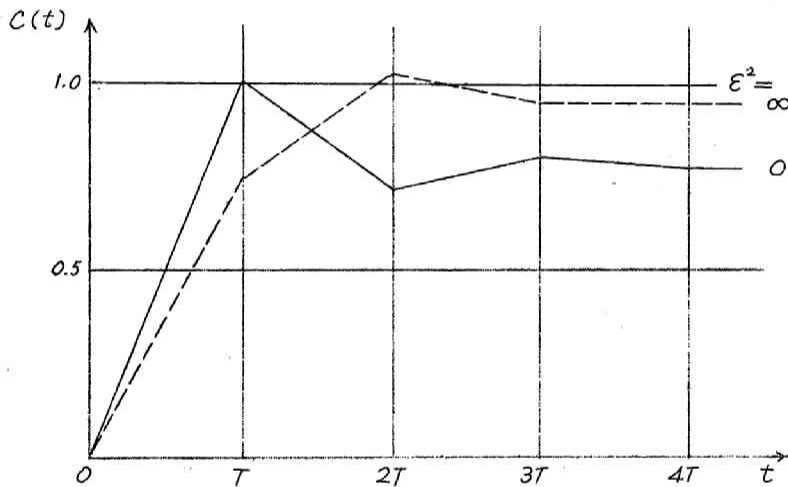
第 2, 10, 5 図

制御系入力と重みの時間的变化

この場合の解析は前の例と同様に計算される。ただし  $r(T_0)$  が上記の重みに入っていないので

$$\left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right] = - \frac{\epsilon^2}{1+2(1-q^2)\epsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2, 10, 57)$$

となる。また  $i, j$  は 1, 2 とせず 0, 2 ととる必要がある。第 2, 10, 2 図と同一の  $q, h$  ( $q=0.7408, h=0.8187$ ) の場合の応答を第 2, 10, 6 図に示す。これを第 2, 10, 2 図と比べると、その定常特性は著るしく良好となることがわかる。



第 2, 10, 6 図

重み関数(2,10,56)式を用いた場合の制御系応答

## 11 結 言

以上の考察では制御系入力の変動状態に依存する重みを考慮して最適制御系を設計する理論を展開し、制御系偏差の分散を最小にする設計法と有限整定時間応答にする設計法との中間的設計法となることを示した。

I. で考察したサンプル点における応答のみ考慮した設計法は制御系入力が正規確率過程に従う場合につき、重み関数を適当に選定することにより簡明な設計法がえられることがわかった。

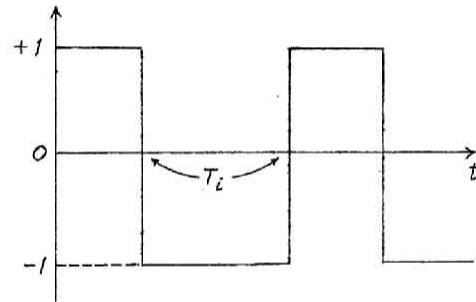
Ⅲ. において考察したサンプル点間における応答をも考慮する場合には、一般にその解析は複雑となる。しかし以上の理論的考察は制御系入力の変動状態に依存する重みを加味する設計の可能性を示すものであって、実際の設計には適当な実験的手段を用いることも考えられる。

## 第三章 リレー制御系の不規則変動入力に対する応答<sup>(13)</sup>

### 1 緒 言

非線型制御系の不規則変動入力に対する応答を解析するために非線型要素を等価利得を有する増巾器にて置換し線型化することにより取扱うのが普通である。しかし、その応答を更に詳しく調べたい場合や、不規則変動入力正規分布に従わない場合には理論的解析が困難である。ここでは、制御系入力について第 3.1.1 図に示す様に一定の絶対値を有し、その極性が反転する時間の間隔

$T_i$  が互いに独立であり、或る一定の統計的分布に従う場合について考察する。非線型要素の特性はリレー特性とし、これを線型化することなく取扱うことを試みた。制御対象としては積分の場合、一次おくれの場合及び積分とむだ時間を有する場合の三種の場合について解析した。



第 3.1.1 図

制御系入力

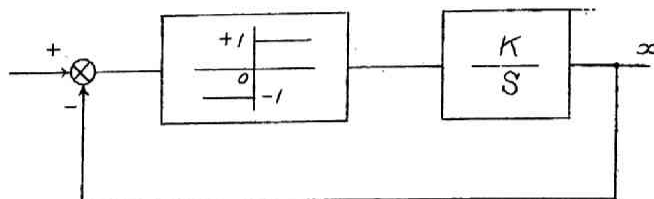
制御対象の次数が 2 次以上の場合に厳密な解析を行なうことは困難である。また制御対象がむだ時間を有する際には、むだ時間より短い継続時間  $T_i$  を有する変動入力に対して解析を行なうことも困難であることがわかった。第 3.1.1 図の様な不規則変動入力は  $T_i$  の長さのとり方により制御系への信号成分とも解釈されるし、また雑音成分を模擬したものとも考えられる。

### 2 制御対象が積分特性を有する場合

第 3.2.1 図の様に最も簡単な場合として制御対象が積分特性にて表わ

される場合につき制御系出力  $x$  の確率密度関数を考察する。

制御系入力が  $-1$  より  $+1$  に変化する際における制御系出力の確率密度関数を  $f^{(+)}(x)$ 、逆に制御系入力が  $+1$  より  $-1$  に変化する際の制御系出力の確率密度関数を  $f^{(-)}(x)$  とすれば、対称の理により、



第 3, 2, 1 図

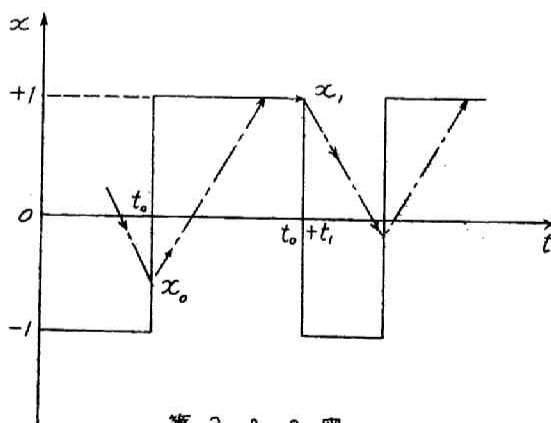
制御対象が積分特性を有する場合

$$f^{(-)}(x) = f^{(+)}(-x) \equiv f(x) \quad (3, 2, 1)$$

が成立する。第 3, 2, 2 図において制御系出力が  $+1$  より  $-1$  に変化する時刻の制御系出力の値  $x = x_1$  はその前に制御系出力が  $-1$  より  $+1$  に変化した時刻の制御系出力値  $x = x_0$ 、及び制御系出力が一定であった継続時間  $t = t_1$  によって定まり、

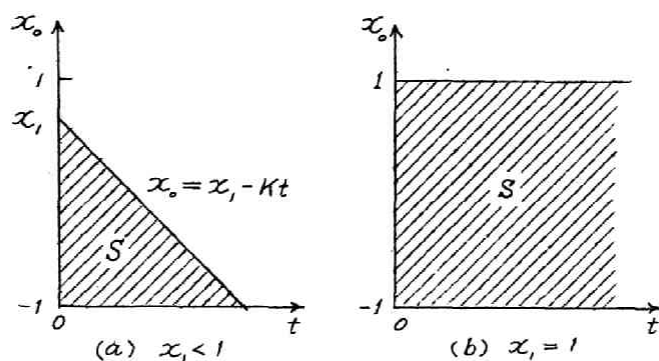
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + kt_1 & (x_0 + kt_1 \leq 1) \\ x_1 &= 1 & (x_0 + kt_1 \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (3, 2, 2)$$

が成立する。ここで  $f^{(-)}(x)$  に注目すると



第 3, 2, 2 図

制御対象が積分特性を有する場合の制御系の応答



第 3.2.3 図  
積分領域  $S$

$$\int_{-1}^{x_1} f^{(-)}(x) dx = \iint_S f^{(+)}(x_0) p(t) dx_0 dt \quad (3.2.3)$$

ここで  $p(t)$  は制御系入力が一一定である時間の間隔  $T_i$  の確率密度関数であり、また領域  $S$  は第 3.2.3 図に示される。

(3.2.3) 式を  $x_1 < 1$  の場合について書きなおすと、

$$\int_{-1}^{x_1} f^{(-)}(x) dx = \int_{-1}^{x_1} f^{(+)}(x_0) dx_0 \int_0^{(x_1-x_0)/K} p(t) dt, \quad (3.2.4)$$

或いは面迎を  $x$  につき微分した形で

$$f(x) = \int_{-1}^x f(-x_0) p\left(\frac{x-x_0}{K}\right) \frac{dx_0}{K} \quad (x < 1) \quad (3.2.5)$$

がえられる。

時間間隔  $T_i$  の分布  $p(t)$  としてポアソン分布を仮定し、

$$p(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (3.2.6)$$

とおく。ここに  $T$  は平均時間間隔を表わす。(3.2.6) 式を (3.2.5) 式に代入すれば

$$f(x) e^{x/KT} = \int_{-1}^x f(-y) e^{y/KT} \frac{dy}{KT} \quad (3.2.7)$$

面迎を  $x$  について微分し

$$f(x) + KT f'(x) = f(-x) \quad (3, 2, 8)$$

上式で  $x$  の代りに  $-x$  においてえられる式と組合せることにより、

$$f''(x) = 0 \quad (3, 2, 9)$$

がえられる。従って

$$f(x) = Ax + B \quad (-1 < x < 1) \quad (3, 2, 10)$$

なる解がえられる。 $x = 1$  におけるデルタ関数の部分を考慮すれば、

$$f(x) = Ax + B + C\delta(x-1) \quad (3, 2, 11)$$

常数  $A, B, C$  のうち二つは (3, 2, 11) 式を (3, 2, 4) 式に代入すればえられる。即ち、

$$A = 0, \quad B = C/KT \quad (3, 2, 12)$$

故に

$$f(x) = B[1 + KT\delta(x-1)] \quad (3, 2, 13)$$

この  $B$  は  $f(x)$  が確率密度関数なことより、

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \quad (3, 2, 14)$$

を用いて決定され、

$$B = \frac{1}{2 + KT} \quad (3, 2, 15)$$

従って、

$$f(x) = \frac{1}{(2 + KT)} [1 + KT\delta(x-1)] \quad (3, 2, 16)$$

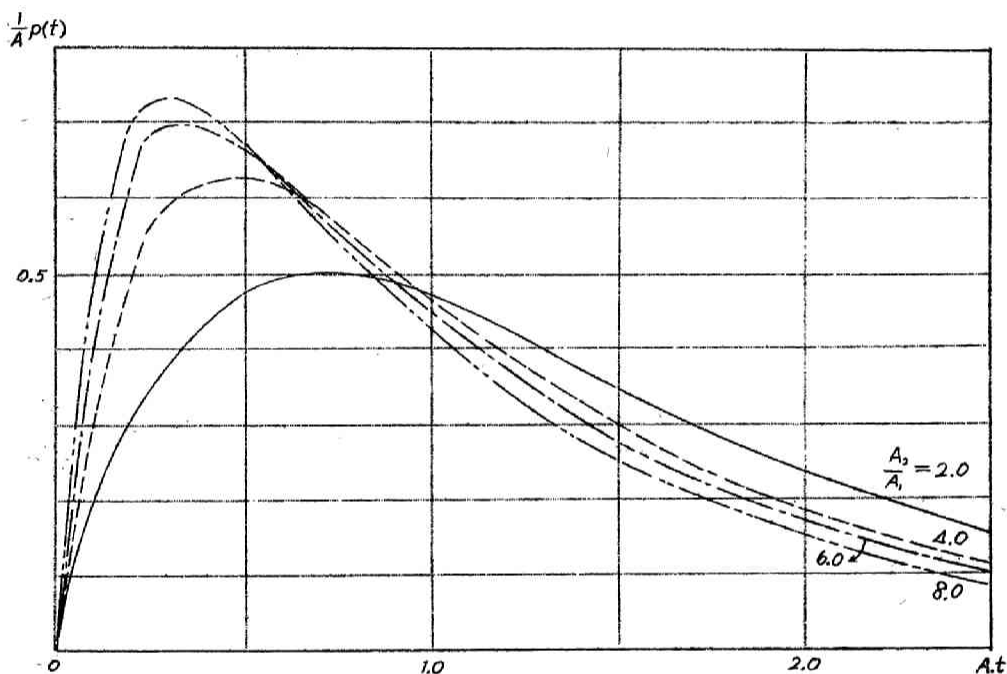
がえられる。従って制御系出力の確率密度関数は二つの部分より成り、一つの部分は  $-1 < x < 1$  において一定値  $1/(2 + KT)$  をとり、他の部

分は  $x=1$  におけるデルタ関数により示される。このうち前者が制御系偏差を示す。

以上の解析では制御系入力の一一定なる時間の間隔  $T_i$  の分布を (3, 2, 6) 式の様に仮定したが、更に一般的な分布形として

$$p(t) = \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_1} (e^{-A_1 t} - e^{-A_2 t}) \quad (A_2 > A_1) \quad (3, 2, 17)$$

について考える。 $p(t)$ の概略の形を第3, 2, 4図に示す。



第 3. 2. 4 図

(3, 2, 17) 式を (3, 2, 5) 式に用いると

$$f(x) = \int_{-1}^x f(-y) \alpha \left[ e^{-\frac{A_1}{K}(x-y)} - e^{-\frac{A_2}{K}(x-y)} \right] \frac{dy}{K} \quad (3, 2, 18)$$

ただし

$$\alpha = \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_1} \quad (3, 2, 19)$$

とおいた。前と同様に解析すれば  $f(x)$  として次式をうる。



$$f(x) = c \{ u_0 + u_1 e^{-bx} + u_2 e^{bx} + K \delta(x-1) \} \quad (3, 2, 20)$$

ただし  $b, c, u_0, u_1, u_2$  はいずれも常数で、

$$u_1 = a u_0 \quad (3, 2, 21)$$

$$u_0 = \left( \frac{A_1 A_2}{bK} \right) \cdot \frac{a e^b + e^{-b}}{a e^b - e^{-b}} \quad (3, 2, 22)$$

$$u_2 = - \left( \frac{A_1 A_2}{bK} \right) \cdot \frac{a}{a e^b - e^{-b}} \quad (3, 2, 23)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\left( \frac{bK}{A_1} - 1 \right) \left( \frac{bK}{A_2} - 1 \right)} = \frac{1}{\left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2} - 1 \right\} \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2} - 1 \right\}} \\ &= \left( \frac{bK}{A_1} + 1 \right) \left( \frac{bK}{A_2} - 1 \right) = \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2} - 1 \right\} \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2} + 1 \right\} \end{aligned} \quad (3, 2, 24)$$

$$b = \left( \frac{A_1}{K} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2} \quad (3, 2, 25)$$

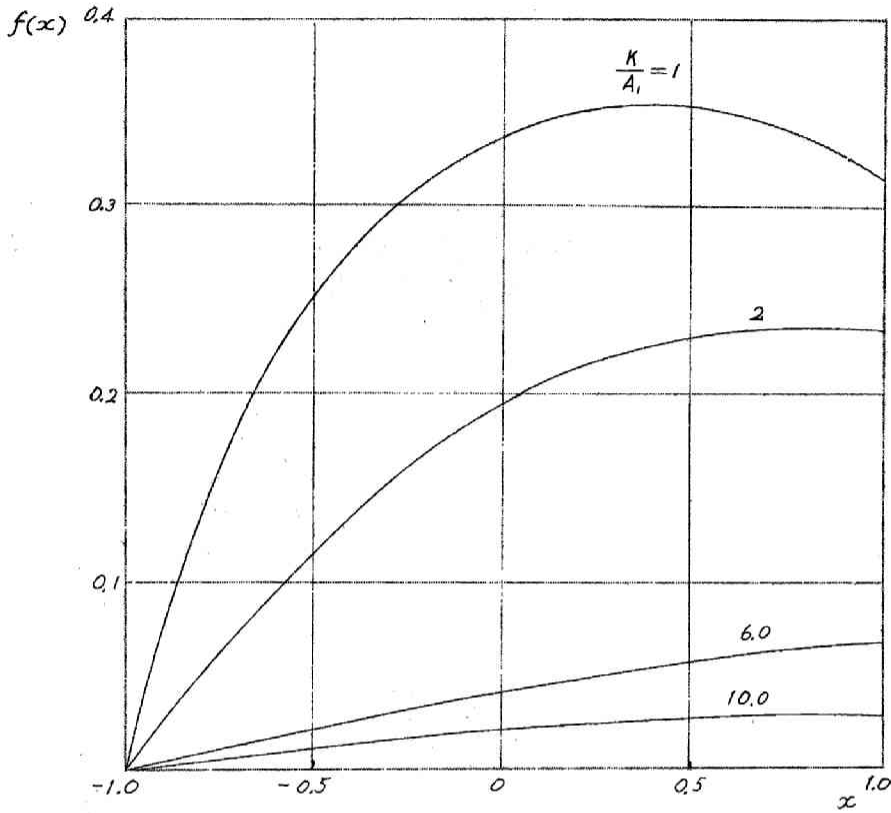
で与えられる。また常数  $c$  は (3, 2, 20) 式から、

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = c \left[ 2u_0 + u_1 \int_{-1}^1 e^{-bx} dx + u_2 \int_{-1}^1 e^{bx} dx + K \right] = 1 \quad (3, 2, 26)$$

により求められる。即ち、

$$\frac{1}{c} = 2 \left( \frac{A_1 A_2}{bK} \right) \frac{a e^b + e^{-b}}{a e^b - e^{-b}} - \frac{1}{b} (e^b - e^{-b}) \left( \frac{A_1 A_2}{bK} \right) \frac{(1+a)}{(a e^b - e^{-b})} + K \quad (3, 2, 27)$$

第 3, 2, 5 図は  $\frac{A_2}{A_1} = 2$  の場合について  $\frac{K}{A_1}$  をパラメータとして制御系出力の確率密度関数  $f(x)$  を示したものである。実際には  $x=1$  においてデルタ関数の成分を有している。また本例では前の場合と異って  $p(0)=0$  であるから  $f(-1)=0$  となっている。



第 3, 2, 5 図

$p(t)$  が (3, 2, 17) 式で与えられる場合の制御系出力の確率密度関数  $f(x)$  ( $\frac{A_2}{A_1} = 2.0$ )

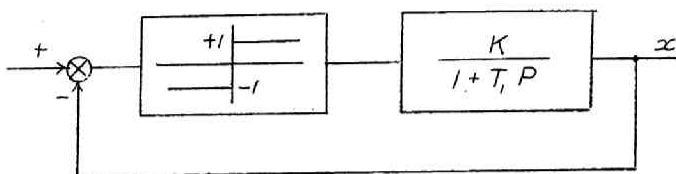
### 3 制御対象が 1 次遅れ特性を有する場合

この場合の制御系の構成を第 3, 3, 1 図に示す。またその際の応答を第 3, 2, 2 図に示す。

操作量が +1 なる間の応答は、

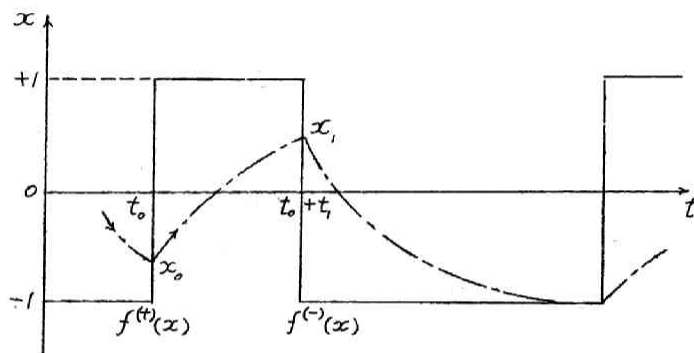
$$x = K + (x_0 - K)e^{-t/t_1} \quad (x_1 \leq 1) \quad (3, 3, 1)$$

と表わされる。ただし右辺が 1 をこえる場合は  $x = 1$  となる。従って  $t = t_1$  において



第 3, 3, 1 図

制御対象が 1 次遅れ特性を有する場合の制御系の構成



第 3, 3, 2 図

制御対象が 1 次遅れ特性を有する場合の制御系の応答

$$x_1 = K + (x_0 - K)e^{-t_1/T_i} \quad (x_1 \leq 1) \quad (3, 3, 2)$$

$$x_1 = 1 \quad (K + (x_0 - K)e^{-t_1/T_i} > 1) \quad (3, 3, 3)$$

なる関係がえられる。以下 [2] において行なったと同様に解析できる。  
即ち  $x_1 < 1$  に対して、

$$\int_{-1}^{x_1} f^{(-)}(x) dx = \int_{-1}^{x_0} f^{(+)}(x_0) dx_0 + \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (3, 3, 4)$$

ただし  $p(t)$  に関する積分の上限  $t_1$  は次式から与えられる。

$$x_0 = K + (x_1 - K)e^{t_1/T_i} \quad (3, 3, 5)$$

$p(t)$  として (3, 2, 6) 式を用いると、

$$f(x) = \int_{-1}^x f(-y) \frac{1}{T} \left( \frac{x-K}{y-K} \right)^{T_i/T} \left[ -\frac{T_i}{(x-K)} \right] dy \quad (3, 3, 6)$$

簡単のため  $\frac{T_i}{T} = \alpha$  とおくと上式の微分形として、

$$f'(x)(K-x) + (\alpha-1)f(x) = \alpha f(-x) \quad (3, 3, 7)$$

がえられる。この式で  $x$  の代りに  $-x$  とおいた式と上式とを組合せることにより、

$$(x^2 - K^2)f''(x) + \{K + (3-2\alpha)x\}f'(x) + (1-2\alpha)f(x) = 0 \quad (3, 3, 8)$$

がえられる。これが求める制御系出力の確率密度関数  $f(x)$  を決定する微分方程式である。

$f(x)$  を  $x$  について展開し、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (3, 3, 9)$$

とおき、これを (3, 3, 7) 式に代入し  $x^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) の係数を比較することにより、

$$a_1 = \frac{a_0}{K} \quad (3, 3, 10)$$

$$a_2 = \frac{(1-\alpha)}{K} a_1 \quad (3, 3, 11)$$

$$a_3 = \frac{a_2}{K} \quad (3, 3, 12)$$

$$a_4 = \frac{(1-\frac{\alpha}{2})}{K} a_3 \quad (3, 3, 13)$$

がえられる。これらを用い、かつ  $x=1$  におけるインパルス部分を考慮すると、

$$f(x) = a_0 \left[ 1 + \frac{x}{K} + \frac{(1-\alpha)}{K^2} x^2 + \frac{(1-\alpha)}{K^3} x^3 + \frac{(1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{2})}{K^4} x^4 + \dots \right] + b_0 \delta(x-1) \quad (3, 3, 14)$$

と表わされる。この  $b_0$  は (3, 3, 6) 式と (3, 3, 7) 式とからえられる関係

$$f(-1)(1+K) = \alpha b_0 \quad (3, 3, 15)$$

を満足する。従って、

$$b_0 = \frac{K}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{K^2} \right) \left[ 1 + \frac{(1-\alpha)}{K^2} + \frac{(1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{2})}{K^4} + \frac{(1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{2})(1-\frac{\alpha}{3})}{K^6} + \dots \right] a_0 \quad (3, 3, 16)$$

また  $f(x)$  が確率密度関数なることから (3, 3, 14) 式を用いて、

$$\int_0^1 f(x) dx = 2a_0 \left[ 1 + \frac{(1-\alpha)}{3K^2} + \frac{(1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{2})}{5K^4} + \frac{(1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{2})(1-\frac{\alpha}{3})}{7K^6} + \dots \right] + b_0 = 1 \quad (3, 3, 17)$$

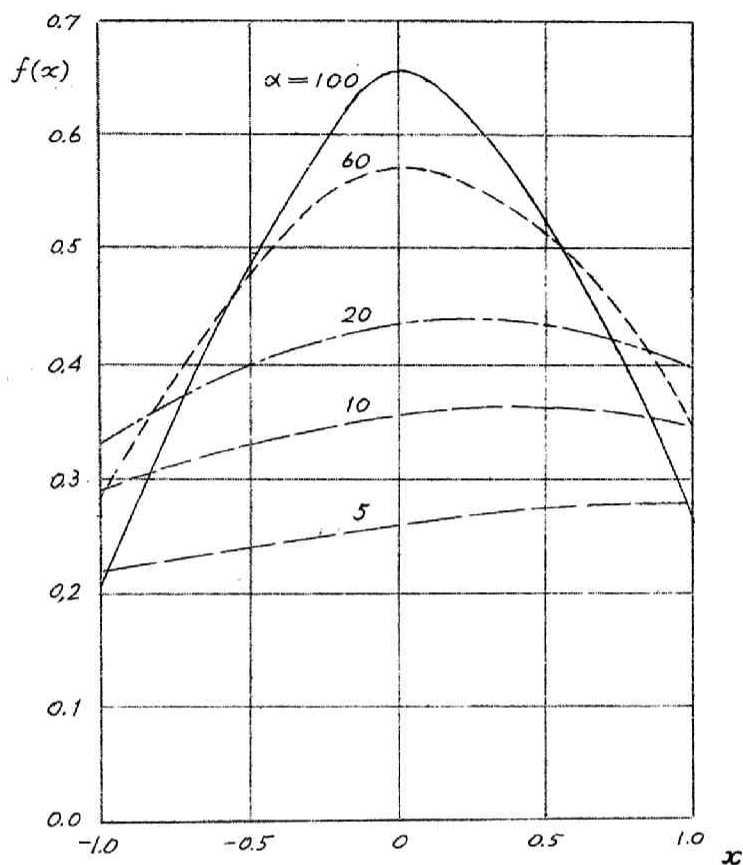
が成立する。

(3, 3, 16) 式及び (3, 3, 17) 式から  $a_0$  及び  $b_0$  を求め、これを (3, 3, 14) 式に用いると所要の制御系出力の確率密度関数  $f(x)$  が求められる。第 3, 3, 3 図は  $f(x)$  を  $\alpha$  即ち  $T_i/T$  の関数として示したものである。 $\alpha$  が大きくなるにつれ制御系入力の変動の平均時間間隔が制御対象の時定数に比して小さくなるので制御系出力が入力に追従出来なくなり、 $x=0$  の近傍に集まり、また  $x=1$  におけるデルタ関数の成分は小さくなる。このような場合は制御系への雑音に対する応答を示すものと考えられる。第 3, 3, 4 図は  $f(x)$  が  $x=1$  において有するデルタ関数の成分の大きさ  $b_0$  を  $\alpha$  の関数として示したものである。

#### 4 制御対象が積分とむだ時間とから成る場合

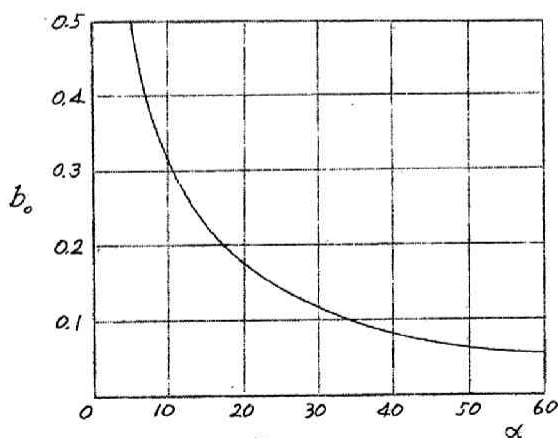
この場合の制御系の構成を第 3, 4, 1 図に示す。制御系入力はいしで記したと同じものとする。この場合、制御系入力の変動せぬ間隔  $T_i$  が制御対象のむだ時間  $L$  より短い時間で変動する場合には解析が困難であるので  $T_i$  はむだ時間  $L$  より長いと仮定する。また簡単のため制御対象のむだ時間  $L$  の存在のために生ずる振動の振巾  $L$  (第 3, 4, 2 図及び第 3, 4, 3 図参照) よりも制御系入力の振巾が大きいものと仮定する。

制御系出力は制御系入力の変動してから、むだ時間  $L$  だけおくれて



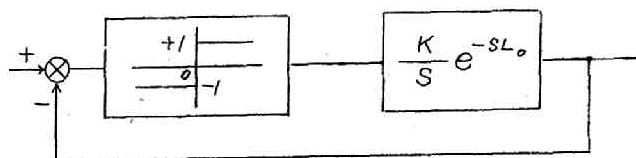
第 3, 3, 3 図

制御対象が 1 次遅れ特性を有する場合の制御系出力の確率密度関数  $f(x)$



第 3, 3, 4 図

制御対象が 1 次遅れ特性を有する場合に  $f(x)$  が  $x=1$  において有するデルタ関数の成分

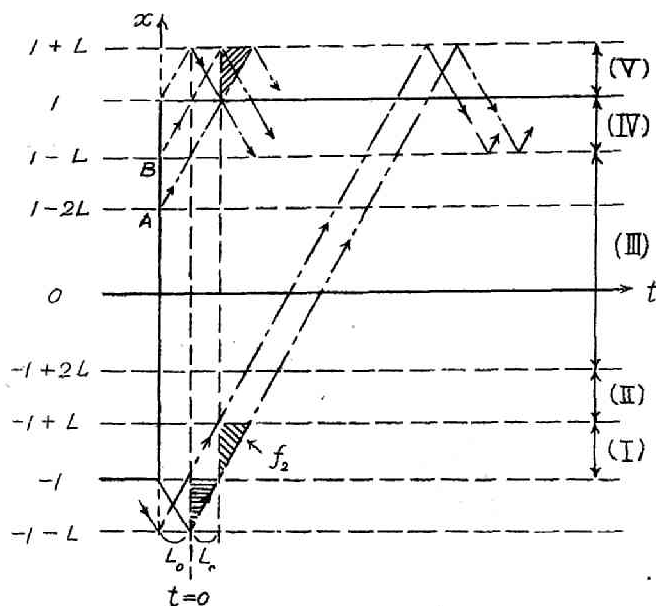


第 3, 4, 1 図

制御対象が積分とむだ時間とから成る場合の制御系の構成

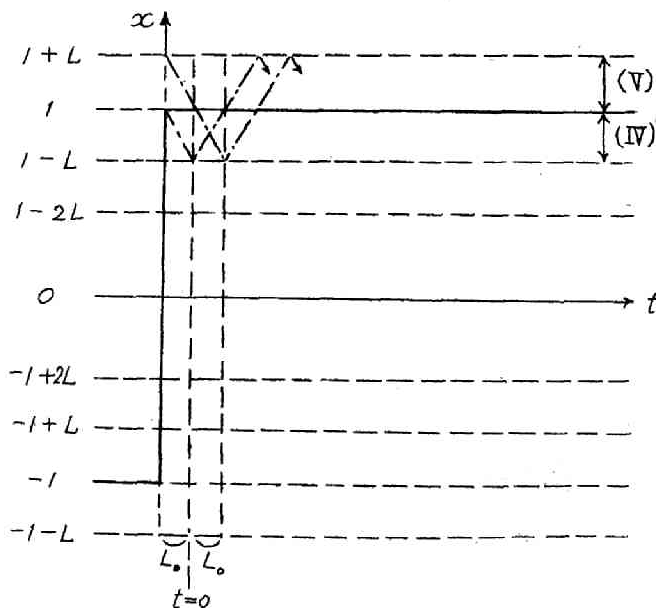
第 3, 4, 2 図

制御系の応答  
の方向と制御  
系入力の変動  
方向が同方向  
の場合



第 3, 4, 3 図


制御系の応答  
の方向と制御  
系入力の変動  
方向が異方向  
の場合



応答を起すわけであるが、制御系入力の変動の時間間隔が短い ( $T_i$  が小さい) 場合には、その応答の方向が制御系入力の変動方向とは逆の場合も生ずる。従って応答の方向が制御系入力の変動方向と同方向か異方向かに従って、二つに分けて考察する。

(1) 制御系の応答の方向と制御系入力の変動方向が同方向の場合

第3, 4, 2図はこの場合の制御系の応答を示したもので、実線が制御系入力、一点鎖線が制御系出力の変化を示す。

時間の原点は制御系入力の変動してから  $L_0$  時間後、即ち制御系が応答し始める時刻を選ぶ。同図で  $f_2$  と書いて示した領域について考えると、次に入って来た制御系入力の変動 (+1 より -1 に変化する変動) により制御系出力がこの領域にある際に変化する場合には、制御系出力はむだ時間  $L_0$  以前には横線  により示される領域にあったのであるから (むだ時間  $L_0$  より短い時間で制御系入力は変動しないと仮定したことに注意)、制御系偏差は正、従ってリレー出力は +1 となり、制御系出力は正方向に増加する。従ってこの領域では次の制御系入力の変動に際しては応答の方向と制御系入力の変動方向とが異方向となることがわかる。この場合の  $t=0$  における  $x$  の分布を  $f_2(x)$  と表わす。さらに制御系入力为正方向に変化する際の  $t=0$  における分布と区別するために制御系入力の変化の正負によって  $f_2(x)$  を  $f_2^+(x)$  および  $f_2^-(x)$  とかけば対称の理により、

$$f_2^-(x) = f_2^+(-x) \equiv f_2(x)$$

が成立する。 $f_2(x)$  は第3, 4, 2図から  $(-1 \leq x \leq -1 + L)$  の領域において存在することがわかる。

上記の領域  $f_2$  を除いたあとの領域では制御系の応答の方向と制御系入力の変動の方向とは同方向である。たゞしむだ時間  $L_0$  より短い時間で制御系入力は変動しないと仮定したから、次の制御系入力の変化による制御系出力の変化は、 $t > L_0$  においてのみ現われることになる。



以上の考察により、分布  $f_1^+(x)$  からは次の制御系入力の変動によって  $f_1^-(x)$  および  $f_2^-(x)$  が生ずること、および  $f_1^-(x)$  は  $(-1+L \leq x \leq 1+L)$  の領域に、また  $f_2^-(x)$  は  $(-1 \leq x \leq -1+L)$  の領域にのみ存在し、領域  $(-1-L < x < -1)$  には  $x$  は分布しないことがわかった。

## (2) 応答の方向と制御系入力の変動方向が逆方向なる場合

この場合の応答を第 3, 4, 3 図に示す。  $t=0$  において制御系出力が負の方向に変化するためには制御系入力に変化した時刻において制御系出力  $x$  が  $(1 < x < 1+L)$  の領域になくてはならぬ。

このことから第 3, 4, 3 図に示す二つの制御系出力の変化を示す一点鎖線が限界を示すことになる。

また、次に制御系入力が  $+1$  から  $-1$  に変動すれば制御系出力は明らかに負の方向に変化するから応答の方向と制御系入力の変動方向とは同方向である。従って  $f_1^-(x)$  に属する。

従って分布  $f_2^+(x)$  からは次の制御系入力の変動によって  $f_1^-(x)$  を生ずること、および  $f_2^+(x)$  は  $(1 \geq x \geq 1-L)$  の領域にのみ存在し、 $f_1^-(x)$  は  $(1+L > x > 1-L)$  の領域にのみ存在することがわかった。  
 $f_2^+(x)$  が  $(1 \geq x \geq 1-L)$  にのみ存在することは  $(1)$  において  $f_2^-(x)$  が  $(-1 \leq x \leq -1+L)$  の領域のみに存在することと一致している。また  $f_1^-(x)$  を  $f_1(x)$  と書くことにすれば、

$$f_1^-(x) \equiv f_1(x) = f_1^+(-x) \quad (3, 4, 2)$$

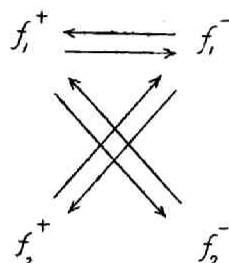
が成立する。

以上 (1)(2) の考察を整理すれば第 3, 4, 4 図の様な関係が相隣れる制御系入力の変化時の分布間に存在することがわかる。

また第 3, 4, 2 図において斜線  $////$  の部分について考えると  $t=-L$  においては第 3, 4, 2 図に示した  $AB$  間を通過したことになるが、以上第 3, 4, 2 図及び第 3, 4, 3 図について行った考察により  $AB$  間を通過する際には制御系出力は負の方向に変化することがわかるので、この斜線をひ

いた部分には  $f_1^+(x)$  は存在しないことがわかる。

以上の予備的考察にもとづいて解析を行なうが第3, 4, 2図および第3, 4, 3図の右端に示した様に  $x$  を5つの領域に分割して考察するのが便利である。



第3, 4, 4図

相隣れる制御系入力変化時の分布間関係

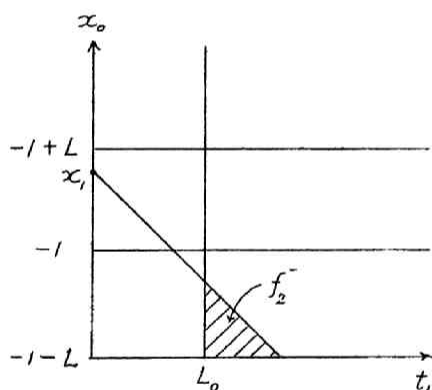
### 領域(I)の場合

第3, 4, 2図を参照すると  $f_1^-(x) \equiv f_1(x) = 0$  であり、 $f_2^-(x) \equiv f_2(x)$  のみ存在することがわかる。入力変動の時間間隔の分布  $p(t)$  を用い、積分領域は第3, 4, 5図に示した斜線の部分となるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x_1} f_2^-(x) dx &= \int_{-1-L}^{x_1-L} f_1^+(x_0) dx_0 \\ &\quad \times \int_{L_0}^{(x_1-x_0)/K} p(t) dt \\ &\quad (-1 < x_1 < -1+L) \\ &\quad (3, 4, 3) \end{aligned}$$

$x_1$  について微分して

$$\begin{aligned} f_2^-(x_1) &= \int_{-1-L}^{x_1-L} f_1^+(x_0) dx_0 p\left(\frac{x_1-x_0}{K}\right) \frac{1}{K} \\ &\quad (-1 < x_1 < -1+L) \\ &\quad (3, 4, 4) \end{aligned}$$



第3, 4, 5図

領域(I)に対する積分領域

がえられる。時間間隔の分布  $p(t)$  として最も簡単な場合として、

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} (t-L_0) & (t \geq L_0) \\ &= 0 & (0 \leq t \leq L_0) \end{aligned} \right\} (3, 4, 5)$$

の場合を取扱う。これを(3, 4, 3)式に用いて、

$$f_2^-(x_1) e^{x_1/KT_0} = \frac{1}{KT_0} e^{L_0/T_0} \left\{ \int_{-1-L}^{x_1-L} f_1^+(x_0) e^{x_0/KT} dx_0 \right\} \quad (3, 4, 6)$$

両辺を  $x_1$  で微分すると

$$\frac{1}{KT_0} f_2^-(x_1) + f_2^{-'}(x_1) = \frac{1}{KT_0} f_1^+(x_1-L) \quad (3, 4, 7)$$

がえられる。こゝで (3, 4, 1) 式, (3, 4, 2) 式を利用し、

$$KT_0 \equiv T \quad (3, 4, 8)$$

とかくと

$$\frac{1}{T} f_2^-(x) + f_2^{-'}(x) = \frac{1}{T} f_1^+(-x+L) \quad (-1 < x < -1+L) \quad (3, 4, 9)$$

がえられる。

### 領域 (II), (III) の場合

この場合には積分領域は第 3, 4, 6 図に示す様になる。領域 (I) の場合と同様にして、

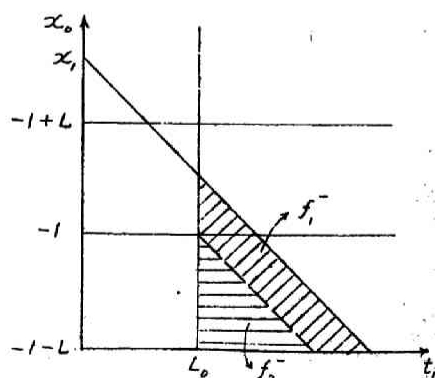
$$\int_{-1}^{-1+L} f_2^-(x_1) dx_1 + \int_{-1+L}^{x_1} f_1^-(x_1) dx_1 = \int_{-1-L}^{x-L} f_1^+(x_0) dx_0 \int_{L_0}^{(x-x_0)/K} p(t) dt \quad (3, 4, 10)$$

上式の微分形として、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} f_1^-(x) + f_1^{-'}(x) &= \frac{1}{T} f_1^+(-x+L) \\ & \quad (-1+L < x < 1-L) \end{aligned} \quad (3, 4, 11)$$

がえられる。この関係は領域 (II) (III) に共通に成立するが、領域 (III) 即ち  $-1+2L < x < 1-L$  に対しては

$$1-L > -x+L > -1+2L \quad (3, 4, 12)$$



第 3, 4, 6 図  
領域 (II), (III) に対する積分領域

が成立するので、 $x$  も  $-x+L$  も共に領域(Ⅲ)に属することがわかる。  
これに反して領域(Ⅱ)では、

$$1 > -x+L > 1-L \quad (3, 4, 13)$$

となり、 $-x+L$  は領域(Ⅳ)に属することがわかる。

従って領域(Ⅲ)の  $x$  に対しては(3, 4, 11)式の  $x$  に  $-x+L$  を代入してえられる次の関係

$$\frac{1}{T} f_1(-x+L) + \frac{d}{d(-x+L)} f_1'(-x+L) = \frac{1}{T} f_1(x) \quad (3, 4, 14)$$

が成立する。(3, 4, 14)式と  $f_1(-x+L)$  として(3, 4, 11)式を用いると、

$$f_1''(x) = 0 \quad (3, 4, 15)$$

がえられる。従って、

$$f_1(x) = C_1 x + c \quad (3, 4, 16)$$

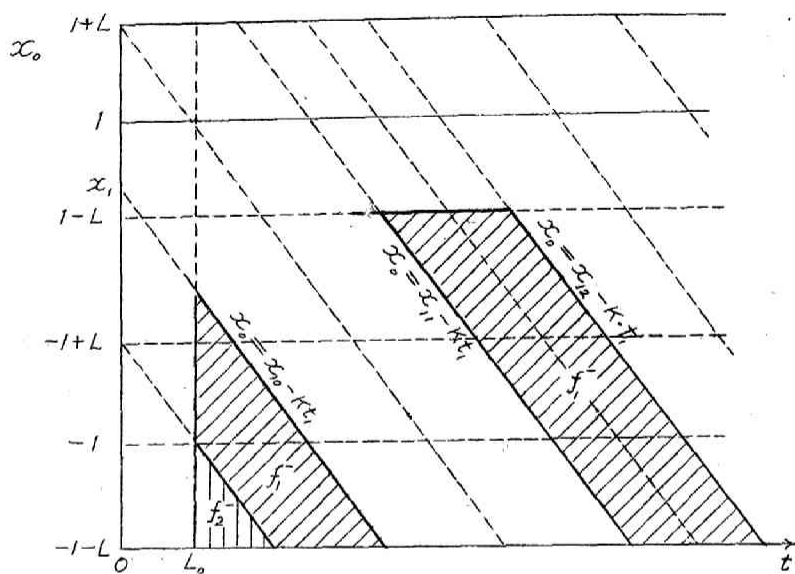
これを(3, 4, 11)式に用いて  $C_1$  が零にひとしいという結論をうる。従って  $f_1(x)$  は領域(Ⅲ)においては一定値をとる。即ち、

$$f_1(x) = c \quad (3, 4, 17)$$

これを、むだ時間のない場合を取扱った **2** の場合と比べると、むだ時間の存在のために  $f_1(x)$  が一定値をとる領域が狭くなり領域(Ⅲ)即ち  $-1+2L < x < 1-L$  間に限定されることを示す。

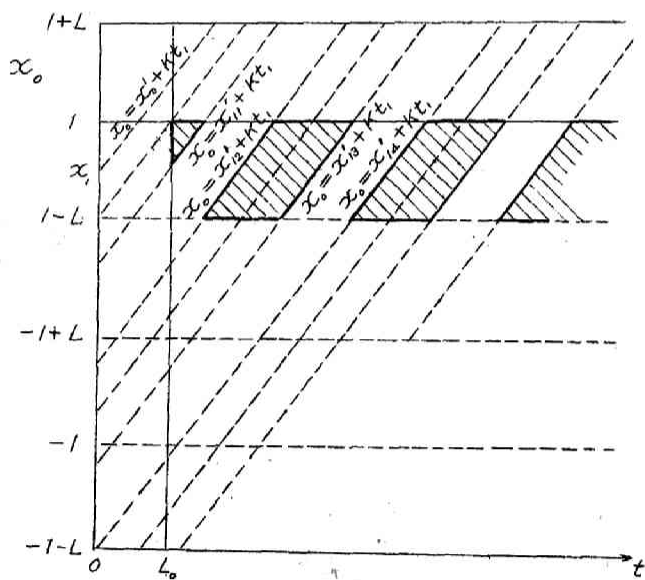
### 領域(Ⅳ)の場合

この領域では第3, 4, 2図および第3, 4, 3図によれば次の制御系入力の変動に対する  $x$  の分布は  $f_2^-(x) = 0$  であって  $f_1^-(x) \equiv f_1(x)$  のみ存在する。またこの領域の  $x$  の分布は  $t=0$  で  $f_1^+(x)$  および  $f_2^+(x)$  に属した  $x$  からの寄与からなっている。従ってこれらを別々に考察することにして積分領域を  $t=0$  で  $f_1^+(x)$  に属したものについては第3,



第 3, 4, 7 図

領域 (IV) に対する  $t=0$  で  $f_1^+(x)$  に属した  $x$  の積分領域



第 3, 4, 8 図

領域 (IV) に対する  $t=0$  で  $f_2^+(x)$  に属した  $x$  の積分領域

4, 7 図に、また  $t=0$  で  $f_2^+(x)$  に属したもののについては第 3, 4, 8 図に示す。

たゞし第 3, 4, 7 図において  $x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= x_1 \\ x_{11} &= 2(1+L) - x_1 \\ x_{12} &= x_{10} + 4L \\ x_{13} &= x_{11} + 4L \end{aligned} \right\} \quad (3, 4, 18)$$

第 3, 4, 8 図に対して  $x'_{10}, x'_{11}, x'_{12}, x'_{13}, \dots$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x'_{10} &= x_1 \\ x'_{11} &= 2(1-L) - x_1 \\ x'_{12} &= x'_{10} - 4L \\ x'_{13} &= x'_{11} - 4L \end{aligned} \right\} \quad (3, 4, 19)$$

第 3, 4, 7 図及び第 3, 4, 8 図から、

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{-1+L} f_2^-(x) dx + \int_{1+L}^{x_1} f_1^-(x) dx = \int_{-1-L}^{x_1-L} f_1^+(x_0) dx_0 \int_{L_0}^{(x_1-x_0)/K} p(t) dt \\ & + \int_{-1-L}^{1-L} f_1^+(x_0) dx_0 \left\{ \int_{(x_{11}-x_0)/K}^{(x_{12}-x_0)/K} p(t) dt + \int_{(x_{13}-x_0)/K}^{(x_{14}-x_0)/K} p(t) dt + \dots \right\} \\ & + \int_{x'_{11}+L}^1 f_2^+(x_0) dx_0 \int_{L_0}^{(x_0-x'_{11})/K} p(t) dt + \int_{1-L}^1 f_2^+(x_0) dx_0 \left\{ \int_{(x_0-x'_{12})/K}^{(x_0-x'_{13})/K} p(t) dt \right. \\ & \left. + \int_{(x_0-x'_{14})/K}^{(x_0-x'_{15})/K} p(t) dt + \dots \right\} \quad (1-L < x < 1) \end{aligned} \quad (3, 4, 20)$$

上式を  $x_1$  につき微分すると ( $x_1$  の代りに  $x$  と表わす)

$$f_1^-(x) = \int_{-1-L}^{x-L} f_1^-(x_0) p\left(\frac{x-x_0}{K}\right) \frac{dx_0}{K} + \int_{-1-L}^{1-L} f_1^-(x_0) \frac{dx_0}{K} \sum_{i=1}^{\infty} p\left(\frac{x_1-x_0}{K}\right)$$

$$+ \int_{x'_{ii}+L}^1 f_2(-x_0) p\left(\frac{x-x'_{ii}}{K}\right) \frac{dx_0}{K} + \int_{1-L}^1 f_2(-x_0) \frac{dx_0}{K} \sum_{i=1}^{\infty} p\left(\frac{x_0-x'_{ii}}{K}\right) \quad (3, 4, 21)$$

がえられる。こゝで  $p(t)$  として (3, 4, 5) 式を用い、右辺第二項では (3, 4, 18) 式を用いてえられる次の関係

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^{\infty} p\left(\frac{x_{ii}-x_0}{K}\right) = \frac{e^{-L/T}}{(1-e^{-4L/T})} \cdot \frac{e^{x_0/T}}{T} \left[ e^{-\frac{2L}{T}} e^{-\frac{x}{T}} + e^{-\frac{3}{T}} e^{\frac{x}{T}} \right] \quad (3, 4, 22)$$

を用い、右辺第四項では (3, 4, 19) 式を用いてえられる次の関係を用いる。

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^{\infty} p\left(\frac{x_0-x'_{ii}}{K}\right) = \frac{e^{-5L/T}}{(1-e^{-4L/T})} \cdot \frac{e^{-x_0/T}}{T} \cdot \left[ e^{x/T} e^{2L/T} + e^{\frac{2}{T}} e^{-x/T} \right] \quad (3, 4, 23)$$

(3, 4, 21) 式はかくして次の形をとる。

$$f_i(x) = \phi_1(x) e^{-x/T} + \phi_2(x) \quad (3, 4, 24)$$

たゞし  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  は各々次式で定義される。

$$\phi_1(x) = \frac{1}{T} \left[ e^{L/T} \int_{1-L}^{x-L} f_1(x_0) e^{x_0/T} dx_0 + e^{(2-L)/T} \int_{(2-L-x)}^1 f_2(-x_0) e^{-\frac{x_0}{T}} dx_0 \right] \quad (3, 4, 25)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) = & \frac{1}{T(1-e^{-4L/T})} \left[ c_1 e^{-L/T} \left\{ e^{-x/T} e^{-2L/T} + e^{x/T} e^{-2L/T} \right\} \right. \\ & \left. + c_2 e^{-5L/T} \left\{ e^{-x/T} e^{2L/T} + e^{x/T} e^{2L/T} \right\} \right] \quad (3, 4, 26) \end{aligned}$$

たゞし  $c_1$  および  $c_2$  は次の関係をもつ常数である。

$$c_1 \equiv \int_{1-L}^{1-L} f_1(-x_0) e^{x_0/T} dx_0 \quad (3, 4, 27)$$

$$c_2 \equiv \int_{1-L}^1 f_2(-x_0) e^{-\frac{x_0}{T}} dx_0 \quad (3, 4, 28)$$

(3, 4, 24)式の解を求めるために  $x$  について微分すると、

$$f_1'(x) = -\frac{1}{T} e^{-x/T} \phi_1(x) + e^{-x/T} \phi_1'(x) + \phi_2'(x) \quad (3, 4, 29)$$

$\phi_1'(x)$  を (3, 4, 25)式より求めて、また  $\phi_1(x) e^{-x/T}$  を (3, 4, 24)より求めて上式に用いると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} f_1(x) + f_1'(x) - \frac{1}{T} f_1(-x+L) - \frac{1}{T} f_2(x+L-2) \\ = \frac{1}{T} \phi_2(x) + \phi_2'(x) \end{aligned} \quad (3, 4, 30)$$

上式右辺を (3, 4, 26)式を用いて計算すると、

$$\frac{1}{T} \phi_2(x) + \phi_2'(x) = A e^{x/T} \quad (3, 4, 31)$$

ここで、

$$A = \frac{2e^{-L/T}}{T^2(1-e^{-4L/T})} [c_1 e^{-2L/T} + c_2 e^{-2L/T}] \quad (3, 4, 32)$$

従って (3, 4, 30)式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} f_1(x) + f_1'(x) - \frac{1}{T} f_1(x+L) - \frac{1}{T} f_2(x+L-2) = A e^{x/T} \\ (-L < x < 1) \end{aligned} \quad (3, 4, 33)$$

領域 (IV) では、

$$-1 < x+L-2 < -1+L \quad (3, 4, 34)$$

であるから  $x+L-2$  は領域 (I) に属することがわかる。従って  $f_2(x+L-2)$  として (3, 4, 9)式を用いることができる。即ち、

$$\frac{1}{T} f_2(x+L-2) + f_2'(x+L-2) = \frac{1}{T} f_2(2-x) \quad (3, 4, 35)$$

従って (3, 4, 35)式と (3, 4, 33)式とから  $f_2(x+L-2)$  を消去すれば、

$$\frac{1}{T^2} f_1(x) + \frac{2}{T} f_1'(x) + f_1''(x) - \frac{1}{T^2} f_1(-x+L) + \frac{1}{T} f_1'(-x+L) - \frac{1}{T^2} f_1(-x+2)$$



$$= 2 \frac{A}{T} e^{x/T} \quad (3, 4, 36)$$

しかるに、

$$-1+2L > -x+L > -1+L \quad (3, 4, 37)$$

であるから  $(-x+L)$  は領域(II)に属する。従って(3, 4, 11)式が適用される。即ち、

$$\frac{1}{T} f_1(-x+L) + f_1'(-x+L) = \frac{1}{T} f_1(x) \quad (3, 4, 38)$$

従って(3, 4, 38)式と(3, 4, 36)式とから  $f_1(-x+L)$  は消去され、

$$f_1'''(x) + \frac{1}{T} f_1''(x) + \frac{1}{T^2} f_1'(-x+2) + \frac{1}{T^3} f_1(-x+2) = 0 \quad (3, 4, 39)$$

がえられる。しかるに

$$1+L > -x+2 > 1 \quad (3, 4, 40)$$

であるから、 $(-x+2)$  は領域(V)に属することがわかる。従って領域(V)における  $f_1(x)$  が決定されれば、これを(3, 4, 39)式に用いることにより領域(IV)の解がえられる。

### 領域(V)の場合

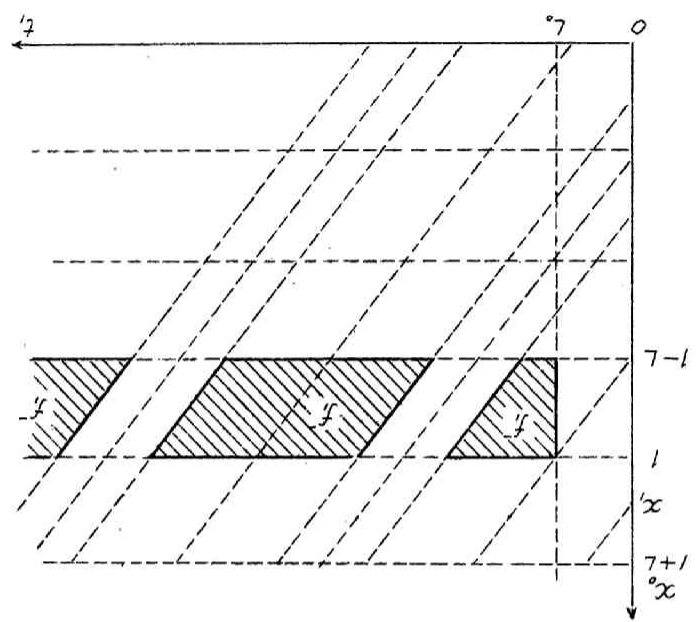
この領域では第3, 4, 2図及び第3, 4, 3図を参照すれば領域(IV)の場合と同様に  $t=0$  において  $f_1^+(x)$  及び  $f_2^+(x)$  に属した  $x$  から生ずる奇与から成ることがわかる。積分領域を  $t=0$  において  $f_1^+(x)$  に属した  $x$  については第3, 4, 9図に、また  $t=0$  において  $f_2^+(x)$  に属した  $x$  については第3, 4, 10図に示す。

この場合は領域(IV)で行なったと同様の解析を行なうことができる。即ち、

$$\int_{-1}^{-1+L} f_2^-(x) dx + \int_{-1+L}^{x_1} f_1^-(x) dx = \int_{-1-L}^{1-L} f_1^+(x_0) dx_0 \int_{L_0}^{(x_1-x_0)/K} p(t) dt$$

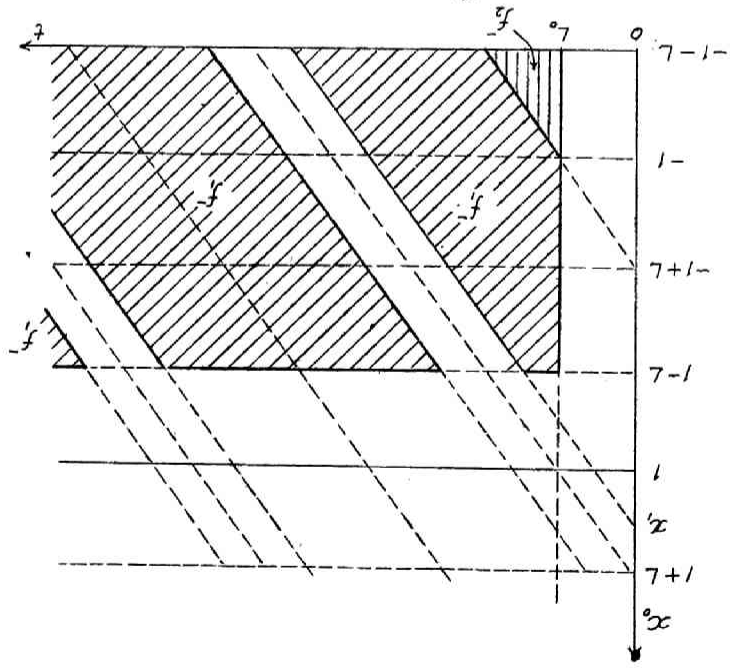
領域(V) に対する  $t=0$  で  $f_2^+(x)$  に属した  $x$  の積分領域

第 3, 4, 10 図



領域(V) に対する  $t=0$  で  $f_1^+(x)$  に属した  $x$  の積分領域

第 3, 4, 9 図



$$\begin{aligned}
 & + \int_{-1-L}^{1-L} f_1^+(x_0) dx_0 \left\{ \int_{(x_{11}-x_0)/K}^{(x_{13}-x_0)/K} p(t) dt + \int_{(x_{13}-x_0)/K}^{(x_{14}-x_0)/K} p(t) dt + \dots \right\} \\
 & + \int_{1-L}^1 f_2^+(x_0) dx_0 \int_{L_0}^{(x_0-x'_{11})/K} p(t) dt + \int_{1-L}^1 f_2^+(x_0) dx_0 \left\{ \int_{(x_0-x'_{12})/K}^{(x_0-x'_{13})/K} p(t) dt \right. \\
 & \left. + \int_{(x_0-x'_{14})/K}^{(x_0-x'_{15})/K} p(t) dt + \dots \right\} \quad (3, 4, 41)
 \end{aligned}$$

から出発して、その微分形として (3, 4, 24) 式に対応して

$$f_1(x) = \phi_1^*(x) e^{-x/\tau} + \phi_2(x) \quad (3, 4, 42)$$

がえられる。ただし、

$$\phi_1^*(x) = \frac{1}{\tau} \left[ e^{4/\tau} \int_{-1-L}^{1-L} f_1(-x_0) e^{x_0/\tau} dx_0 + e^{(2-L)/\tau} \int_{1-L}^1 f_2(-x_0) e^{-x_0/\tau} dx_0 \right] \quad (3, 4, 43)$$

また  $\phi_2(x)$  は (3, 4, 26) 式で与えられるものと同である。

$\phi_1^*(x)$  は常数であることに注意すれば領域 (IV) において行ったと同様の計算により、

$$\frac{1}{\tau} f_1(x) + f_1'(x) = A e^{x/\tau} \quad (3, 4, 44)$$

をうる。ここで  $A$  は (3, 4, 32) 式で与えられるものである。

ここで再び領域 (IV) について考察すれば領域 (IV) にある  $x$  に対しては  $(-x+2)$  は領域 (V) に属するから、(3, 4, 44) 式の  $x$  の代りに  $(-x+2)$  を用いてえられる式

$$\frac{1}{\tau} f_1(-x+2) + f_1'(-x+2) = A e^{(-x+2)/\tau} \quad (3, 4, 45)$$

が領域 (IV) の  $x$  に対して成立する。これを (3, 4, 39) 式に用いると領域 (IV) に対しては、

$$f_1'''(x) + \frac{1}{\tau} f_1''(x) + \frac{A}{\tau^2} e^{(-x+2)/\tau} = 0 \quad (1-L < x < 1) \quad (3, 4, 46)$$

の関係がえられる。

領域(V)に対しては(3, 4, 42)式から、

$$f_1(x) = \frac{AT}{2} \left[ e^{\frac{x}{T}} + e^{\frac{2(1+L)}{T}} e^{-\frac{x}{T}} \right] \quad (3, 4, 47)$$

がえられる。この $f_1(x)$ は $x=1+L$ において零にならぬことに注意すべきである。

領域(IV)に対しては(3, 4, 46)式を解いて

$$f_1(x) = T e^{\frac{x}{T}} \left[ M - 2A - A \frac{x}{T} \right] e^{-\frac{x}{T}} + \gamma x + \delta \quad (3, 4, 48)$$

がえられる。 $M$ ,  $\gamma$  及び  $\delta$  は未知常数である。

領域(III)に対しては $f_1(x)$ は一定で、

$$f_1(x) = c \quad (3, 4, 49)$$

領域(II)では(3, 4, 11)式に(3, 4, 48)式を用いて

$$f_1(x) = \left[ K_1^* + K_2^* \frac{x}{T} \right] e^{\frac{x}{T}} - K_3^* x + K_4^* - K_5^* e^{-\frac{x}{T}} \quad (3, 4, 50)$$

がえられる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_1^* &= \frac{T}{2} e^{\frac{(2-L)}{T}} \left( M - \frac{5}{2} A - \frac{AT}{T} \right) \\ K_2^* &= \frac{TA}{2} e^{\frac{(2-L)}{T}} \\ K_3^* &= \gamma \\ K_4^* &= \gamma(T+L) + \delta \end{aligned} \right\} \quad (3, 4, 51)$$

$K_5^*$ は未知の常数である。

領域(I)では

$$1+L > -x+L > 1 \quad (3, 4, 52)$$

であるから $(-x+L)$ は領域(V)に属することがわかる。従って(3, 4, 47)式を用いて(3, 4, 9)式は、

$$f_2'(x) + \frac{1}{T} f_2(x) = \frac{A}{2} \left[ e^{(x+L+2)/T} + e^{(-x+L)/T} \right] \quad (3, 4, 53)$$

となる。 $f_2(x)$  は上式の解として、

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left[ (A_1^* + Ax) e^{(-x+L)/T} + \frac{TA}{2} e^{(x+L+2)/T} \right] \quad (3, 4, 54)$$

ここで  $A_1^*$  は未知常数であるが、物理的にみて  $x = -1$  において  $f_2(x)$  は零となるものと考えられるから、

$$A_1^* = \left( 1 - \frac{T}{2} \right) A \quad (3, 4, 55)$$

をうる。

残った未知常数  $A, M, \gamma, \delta, c, K_s^*$  に関しては先ず (3, 4, 33) 式に (3, 4, 48) 式, (3, 4, 50) 式, (3, 4, 54) 式を用いて、

$$M = A \left( \frac{3}{4} + \frac{1-L}{T} \right) \quad (3, 4, 56)$$

$$K_s^* = A T e^{4/T} \left( 1 + \frac{1}{4} e^{2L/T} \right) \quad (3, 4, 57)$$

がえられる。次に  $f_1(x)$  は領域(IV)と領域(V)の境界において連続であるべきであるから (3, 4, 47) 式 (3, 4, 48) 式を用いて、

$$\gamma + \delta = A e^{\frac{1}{T}} \left[ 2T + L + \frac{T}{2} (e^{2L/T} - 1) \right] \quad (3, 4, 58)$$

また  $f_1(x)$  は領域(I)と領域(II)の境界においても連続なるべきことより (3, 4, 50) 式と (3, 4, 54) 式を用いて、

$$\gamma(1+T) + \delta = A e^{\frac{1}{T}} \left[ 2T + L + \frac{T}{2} (e^{2L/T} - 1) \right] \quad (3, 4, 59)$$

従って (3, 4, 58) 式, (3, 4, 59) 式より

$$\gamma = 0 \quad (3, 4, 60)$$

$$\delta = A e^{\frac{1}{T}} \left[ 2T + L + \frac{T}{2} (e^{2L/T} - 1) \right] \quad (3, 4, 61)$$

次に領域(II)と(III)の境界においても連続なるべきことより (3, 4, 49)

式及び (3, 4, 50) 式から、

$$c = \delta - ATe^{\frac{1}{T}}(e^{\frac{L}{T}} + e^{-\frac{L}{T}}) \quad (3, 4, 62)$$

がえられる。

以上の考察でえられた各領域に対する  $x$  の確率密度関数を列挙すれば、

(1) 領域(I)

$$f_1(x) = \frac{A}{2} e^{\frac{4}{T}} \left[ \left(1 - \frac{T}{2} + x\right) e^{-\frac{x}{T}} + \frac{T}{2} e^{\frac{2}{T}} e^{\frac{x}{T}} \right] \quad (3, 4, 63)$$

(2) 領域(II)

$$f_1(x) = \frac{A}{2} e^{(2-L)/T} \left\{ \left(1 - \frac{3}{2}T - 2L\right) + x \right\} e^{\frac{x}{T}} + \delta - K_s^* e^{-\frac{x}{T}} \quad (3, 4, 64)$$

ただし、

$$K_s^* = ATe^{\frac{4}{T}} \left[ 1 + \frac{1}{4} e^{\frac{24}{T}} \right] \quad (3, 4, 57)$$

$$\delta = Ae^{\frac{1}{T}} \left[ 2T + L + \frac{T}{2} (e^{\frac{24}{T}} - 1) \right] \quad (3, 4, 61)$$

(3) 領域(III)

$$f_1(x) = \delta - ATe^{\frac{1}{T}}(e^{\frac{4}{T}} + e^{-\frac{L}{T}}) = \text{一定} \quad (3, 4, 65)$$

(4) 領域(IV)

$$f_1(x) = Ae^{\frac{3}{T}} \left[ (1 - T - L) - x \right] e^{-\frac{x}{T}} + \delta \quad (3, 4, 66)$$

(5) 領域(V)

$$f_1(x) = \frac{AT}{2} \left[ e^{\frac{x}{T}} + e^{2(1+L)/T} e^{-\frac{x}{T}} \right] \quad (3, 4, 67)$$

常数は

$$\int_{-1}^{-1+L} f_1(x) dx + \int_{-1+L}^{1+L} f_1(x) dx = 1 \quad (3, 4, 68)$$

から定まる。

## 5 例題とその検討

(3,4,63)式乃至(3,4,68)式を用いて制御系出力  $x$  の確率密度関数  $f(x)$  を求めた数値例を第3,5,1図 ( $L=0.1$ )、第3,5,2図 ( $L=0.5$ )、第3,5,3図 ( $L=1.0$ )に示す。図中に示した(I)乃至(V)の記号は[4]の解析において定義した各領域の番号を示す。 $L=1.0$ の場合には領域(II)、(III)は共に消滅する。

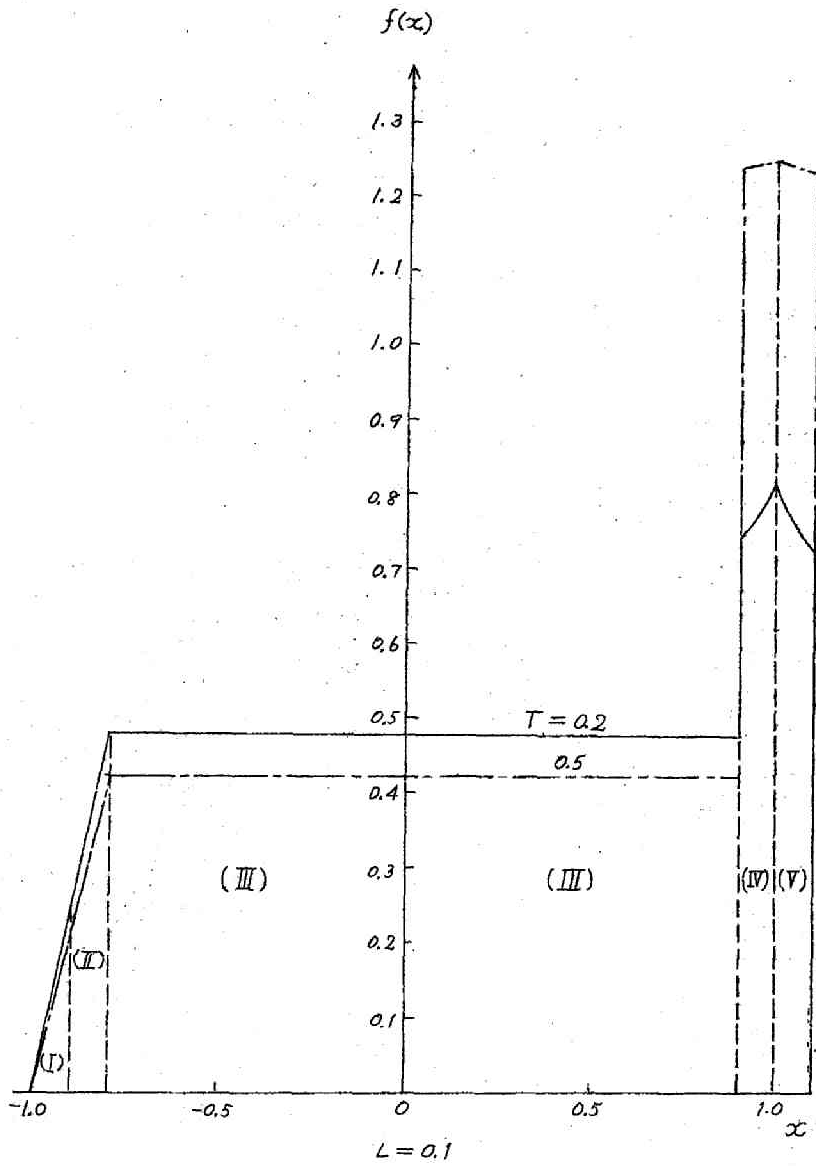
図から、 $L$ が大きい程、制御対象のむだ時間は長くなることとなり、振動の巾は大きく、 $x=1.0$ において有する  $f(x)$  の最大値は減少してゆく。また  $T$  が大きい程、制御系入力の変動の時間間隔の平均値が増すことになり、制御系はより忠実に入力に追従する。

従って  $x$  が  $1-L$  乃至  $1+L$  の、むだ時間のために生ずる振動の巾の間で  $f(x)$  は平坦に近づき、 $L=0.1$ の場合には  $x=1.0$  にて有する最大値は  $T$  が増すと共に増加する。

$L=0.5$  及び  $1.0$  の場合には  $x$  が  $1-L$  乃至  $1+L$  の間で平坦に近づくため  $x=1$  における  $f(x)$  の最大値は  $T$  を増すと逆に減少する。

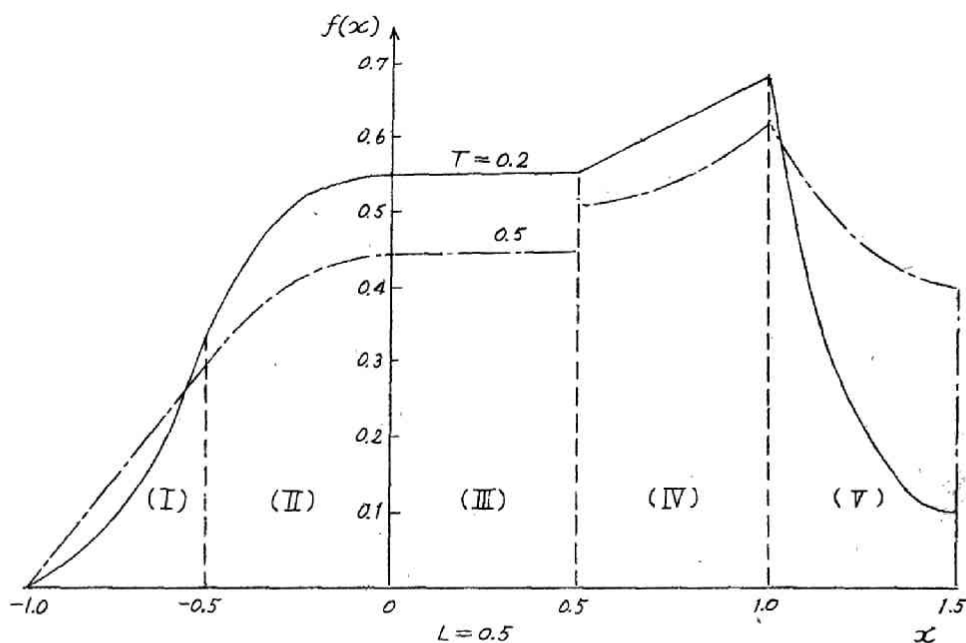
## 6 結 言

以上の考察ではリレー制御系入力を第3,1,1図に示した様な矩形波列と仮定し、制御対象が積分の場合、一次遅れの場合、積分とむだ時間の場合について考察した。制御系入力の変動の時間間隔の分布としてはポアソン分布を仮定したが、その他の分布については制御対象が積分の場合について考察した。制御対象が積分とむだ時間を有する場合には、むだ時間より短い時間間隔で変動する様な制御系入力に対して解析することは難かしいのでこの様な場合は扱っていない。



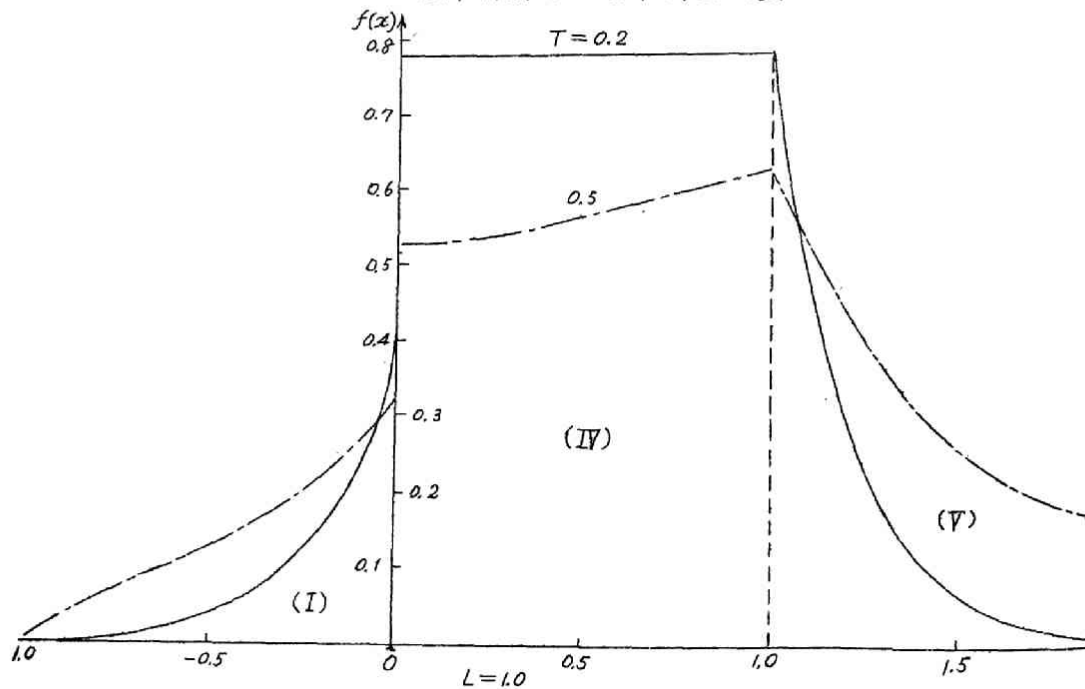
第 3, 5, 1 図  
制御系出力の確率密度関数





第 3, 5, 2 図

制御系出力の確率密度関数



第 3, 5, 3 図

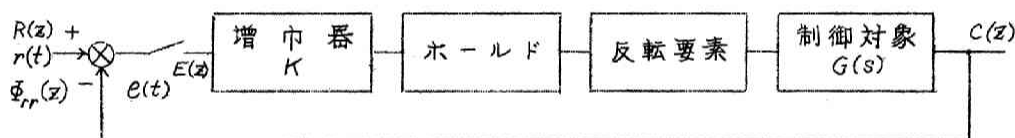
制御系出力の確率密度関数

## 第四章 反転要素を用いるサンプル値制御系の設計

### 1 緒 言

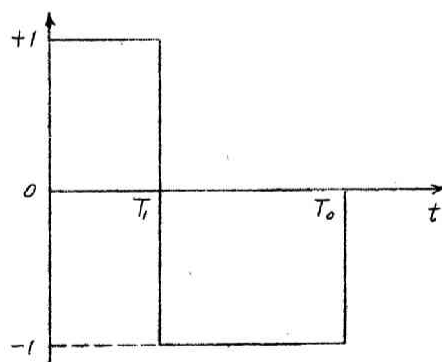
サンプル値制御系は遅延要素を含むサンプル値制御装置を用いて制御されるのが普通であるが、<sup>(14)</sup>ここでは操作量を各サンプリング周期中の一定時点において反転させる様な制御方式について考察する。この方式によれば附録Ⅱにおいて論ずる様に階段状入力に対しては増巾器、サンプラ、ホールド及び上記の反転要素を用いるだけで有限整定時間応答を示す様に設計することができるので制御系の構成は簡単化される。反転要素は単に操作量の極性を逆にするだけであるからスイッチで置換される。

第4,1,1図はこの方式を用いた場合のサンプル値制御系の構成を示す。操作量は第4,1,2図に示される様にサンプリング周期  $T_s$  内の一定時点



第4,1,1図 反転要素を用いたサンプル値制御系の構成

$T_s$  においてその極性を反転せしめられる。附録Ⅱにおいて論ずる様に階段状入力に対する設計では、一般に制御対象の次数より1だけ少ない回数の操作量の反転を行なうと制御系は1サンプリング周期たてば有限整定せしめることができる。また制御対象が飽和を有していても、飽和によ



第4,1,2図

サンプリング周期中における操作量の変化

り制限されるだけずつ応答し、有限整定時間応答を示すという特徴を有する。

以下、かゝる構成の制御系に対して不規則変動入力加わる場合における最適な統計的設計について論じ、ついで制御対象の次数が2次の場合について増巾率  $K$  及び操作量の反転時点  $T_i$  の最適値の統計的決定について解析とその検討を行なう。

## ② 反転要素を用いるサンプル値制御系の統計的設計

第4, 1, 1図に示した様に制御系入力を  $r(t)$ 、その  $z$  変換を  $R(z)$ 、またその離散的スペクトル密度を  $\Phi_{rr}(z)$  とする。また偏差を  $e(t)$ 、その  $z$  変換を  $E(z)$  と表わす。

サンプル点における系偏差の分散  $\sigma_e^2$  は衆知の様に

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{単位円}} \left| \frac{1}{1+G(z)} \right|^2 \Phi_{rr}(z) \frac{dz}{z} \quad (4, 2, 1)$$

と表わされる。こゝで  $G(z)$  は第4, 1, 1図に示した制御系の前向き要素全体のパルス伝達関数を示す。従って統計的設計方法としては増巾率及び操作量の反転時点を適当に選んで(4, 2, 1)式に示される制御系偏差の分散  $\sigma_e^2$  を最小にすればよい。

(4, 2, 1) 式の積分は変換

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (4, 2, 2)$$

により単位円上の積分路を  $w$  軸上に変換できる。即ち(4, 2, 1)式は

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(w) \frac{2dw}{(1+w)(1-w)} \quad (4, 2, 3)$$

ここで  $F(w)$  は

$$F(w) = \left| \frac{1}{1+G\left(\frac{w+1}{w-1}\right)} \right|^2 \Phi_{rr}\left(\frac{w+1}{w-1}\right) \quad (4, 2, 4)$$

で与えられる。この積分は積分表を用いて計算される。

簡単な場合として制御対象  $G(S)$  が、

$$G(S) = \frac{1}{S(S+a)} \quad (4, 2, 5)$$

と表される場合には (ゲイン定数が一様に 1 でない場合には、これを第 4, 1, 1 図の増巾率  $K$  に含めて考える) 第 4, 1, 1 図の前向き要素全体のパルス伝達関数は、

$$\begin{aligned} G(z) &= Z \left[ \left\{ \frac{(1 - e^{-T_0 s})}{S} - \frac{(e^{-T_0 s} - e^{-T_1 s})}{S} \right\} \frac{K}{S(S+a)} \right] \\ &= (1 + z^{-1}) Z \left[ \frac{K}{S^2(S+a)} \right] - 2Z_{m_1} \left[ \frac{K}{S^2(S+a)} \right] \end{aligned} \quad (4, 2, 6)$$

ただし  $T_0$  及び  $T_1$  は第 4, 2, 2 図に示した様にサンプリング周期及び操作量の反転時点を示す。また  $Z$  は  $z$  変換を、 $Z_{m_1}$  は拡張  $z$  変換において  $m_1$  の代りに  $m_1$  を代入したものである。 $m_1$  は反転時点  $T_1$  と次の関係で結ばれる。

$$m_1 = 1 - \frac{T_1}{T_0} \quad (4, 2, 7)$$

$z$  変換及び拡張  $z$  変換の表から

$$G(z) = \frac{K}{a^2} \cdot \frac{A(m_1)z + B(m_1)}{(z - e^{-aT_0})(z - 1)} \quad (4, 2, 8)$$

がえられる。ただし  $A(m_1)$ ,  $B(m_1)$  は常数で

$$A(m_1) = e^{-aT_0} - 2e^{-am_1T_0} + (aT_0 - 2am_1T_0 + 1) \quad (4, 2, 9)$$

$$B(m_1) = 2e^{-am_1T_0} - 1 - e^{-aT_0} (aT_0 - 2am_1T_0 + 1) \quad (4, 2, 10)$$

により与えられる。(4, 2, 9) 式より、

$$\frac{1}{1 + G(z)} = \frac{(z - e^{-aT_0})(z - 1)}{z^2 + C(m_1)z + D(m_1)} \quad (4, 2, 11)$$

こゝで  $C(m_1)$  及び  $D(m_1)$  は  $z$  を含まぬ常数で

$$C(m_i) = \frac{K}{a^2} A(m_i) - (1 + e^{-aT_0}) \quad (4, 2, 12)$$

$$D(m_i) = \frac{K}{a^2} B(m_i) + e^{-aT_0} \quad (4, 2, 13)$$

により与えられる。

不規則な制御系入力の離散的スペクトル  $\Phi_{rr}(z)$  を次の形に仮定する

$$\Phi_{rr}(z) = \frac{(1-q^2)z}{(z-q)(1-qz)} \quad (4, 2, 14)$$

この形は相関関数  $\varphi(\tau)$  が

$$\varphi(\tau) = e^{-\alpha\tau} \quad (q \equiv e^{-\alpha T_0}) \quad (4, 2, 15)$$

なる連続な不規則変動を周期  $T_0$  ごとにサンプリングしてえられる系の離散的スペクトルと解釈することができる。<sup>(6)</sup> (4, 2, 15)式で表わされる変動の例として平均時間間隔が  $1/\alpha$  のポアソン分布に従い、交互に + 及び -1 に変化する矩形波列が挙げられる。

制御系偏差の分散  $\sigma_e^2$  は (4, 2, 1)式に (4, 2, 11)式及び (4, 2, 14)式を用いて

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{単位円}} \left| \frac{(z - e^{-aT_0})(z-1)}{(z^2 + Cz + D)} \right|^2 \cdot \frac{(1-q^2)}{(z-q)(1-qz)} dz \quad (4, 2, 16)$$

(4, 2, 2)式の変換を行なうと

$$\sigma_e^2 = 8(1-q^2) \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(w)c(-w)}{d(w)d(-w)} dw \quad (4, 2, 17)$$

をうる。ただし

$$c(w) = (1 + e^{-aT_0}) + (1 - e^{-aT_0})w \quad (4, 2, 18)$$

$$d(w) = [(1-w)^2 + c(w^2-1) + D(1+w)^2][(1+q) + (1-q)w] \quad (4, 2, 19)$$

こゝで

$$c(w) = c_0 + c_1 w \quad (4, 2, 20)$$

$$d(w) = d_0 + d_1 w + d_2 w^2 + d_3 w^3 \quad (4, 2, 21)$$

とおけば、

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1 + e^{aT_0} \\ c_1 &= 1 - e^{aT_0} \\ d_0 &= (1+g)(1-C+D) \\ d_1 &= (3+g)D - (1+3g)C - C(1-g) \\ d_2 &= (1+g)C + (3-g)D + (3g-1) \\ d_3 &= (1-g)(1+C+D) \end{aligned} \right\} \quad (4, 2, 22)$$

となり (4, 2, 17) 式の積分は

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(w)c(-w)}{d(w)d(-w)} dw = \frac{c_1^2 d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)} \quad (4, 2, 23)$$

従って

$$\sigma_e^2 = 4(1-g^2) \frac{c_1^2 d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)} \quad (4, 2, 24)$$

がえられる。

上式を用い、制御対象の時定数  $aT_0 = 1$ 、また不規則変動のスペクトルが有するパラメータ  $g$  を 0.9 と選んだ場合につき制御系偏差の分散  $\sigma_e^2$  を利得  $K/a^2$  及び操作量の反転時点を示す量  $m_1$  の関数として数値計算した結果を第 4, 2, 1 図に示す。これから  $\sigma_e^2$  は  $K/a^2 \simeq 5.0$ ,  $m_1 \simeq 0.2$  附近で最小となることがわかる。 $m_1 = 0$  の場合は  $K/a^2$  の増加と共に  $\sigma_e^2$  が急激に増加して  $K/a^2$  が 4 と 5 の間で  $\infty$  となるが、この点で制御系は不安定となるのであって、この際 (4, 2, 24) 式の方母の括弧内が零となる。即ち、

$$d_1 d_2 = d_0 d_3 \quad (4, 2, 25)$$

が成立する。

ここでえられた  $\sigma_e^2$  の最小値について考察するに、制御対象は操作量

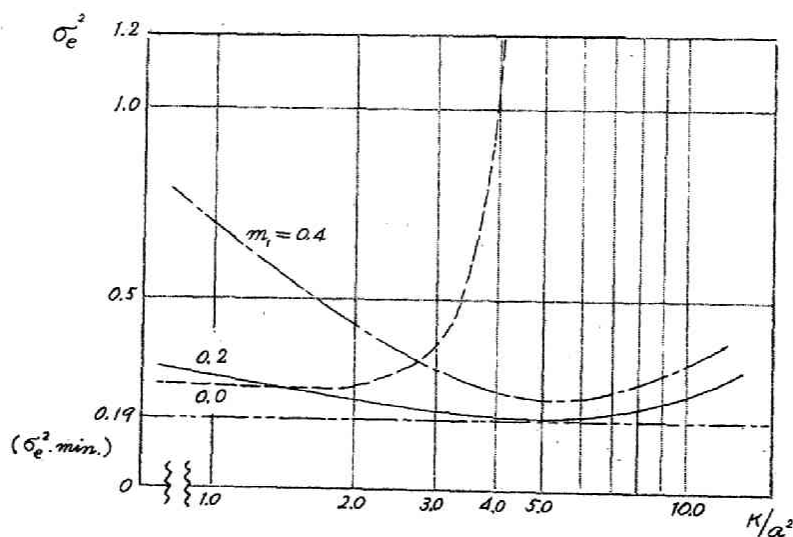
が加わるサンプル点の次のサンプル点から応動する。従って第一章に用いた記号に従えば  $m''=1$  である。また制御対象の分子は単位円外に零点を有しない。この条件の下で制御系入力(4, 2, 14)式の下で最適な制御系パルス伝達関数は、

$$K(z) \equiv \frac{c(z)}{R(z)} = q z^{-1} \quad (4, 2, 26)$$

この場合の制御系偏差  $\sigma_e^2 \min.$  は

$$\sigma_e^2 \min. = \frac{1}{2\pi j} \oint (1-qz^{-1})(1-qz) \Phi_{rr}(z) \frac{dz}{z} = (1-q^2) \quad (4, 2, 27)$$

$q=0.9$  に対しては  $\sigma_e^2 \min. = 0.190$  となる。(第4, 2, 1図の二点鎖線)



第4, 2, 1図

制御系偏差の分散  $\sigma_e^2$  と  $m_i, K/a^2$  との関係 ( $aT_0=1.0, q=0.9$ )

一方、第4, 2, 1図で  $m_i=0.2, \frac{K}{a^2}=5.0$  において  $\sigma_e^2=0.197$  となる。従って制御系偏差の分散よりみて制御系要素として増巾器のみで充分であることがわかる。

### 3 結 言

以上、制御対象の次数が2次の場合について解析を行ない、ある前向き要素のゲイン定数、ある操作量の切換時点において偏差の分散を最小とする様な最適値のあることを示した。この方法による統計的設計は制御対象の次数が3次以上の場合にも適用可能であるが、その解析は複雑となる。この場合には、不規則変動入力の性質に従い、階段状又は速度状入力に対して立てられた設計法が目安を与えるものと考えられる。これらの設計理論については附録Ⅱを参照のこと。



## 第五章 パルス巾制御系の解析

### 1 緒 言

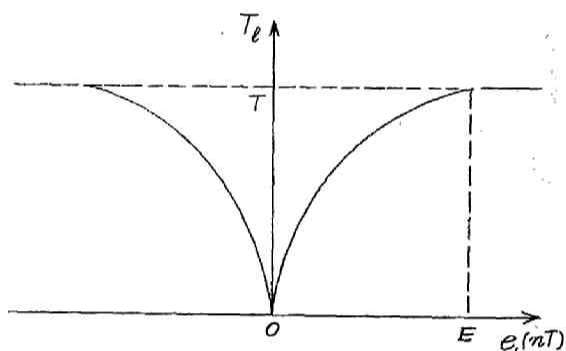
ここでいうパルス巾制御系とは一定の絶対値を有し、一定周期毎の制御系偏差と同一の極性を有し、偏差と共に増加する継続時間を有する矩形パルスにより制御対象を操作する制御系を指す。ただし偏差が或る値をこえて矩形パルス巾がその周期と一致すれば操作量は直流的となり、それ以上偏差が増しても操作量は変わらない。この様なパルス巾制御は一種のサンプル値制御であるが非線型特性を有する。第5, 1, 1図はパルス巾制御要素入力  $e_1(nT)$  とパルス巾  $T_e$  との関係を示したものである。

同図で  $e_1(nT)$  が  $E$  に達しない間の  $T_e$  と  $e_1(nT)$  とは直線的関係でなくてもよい。

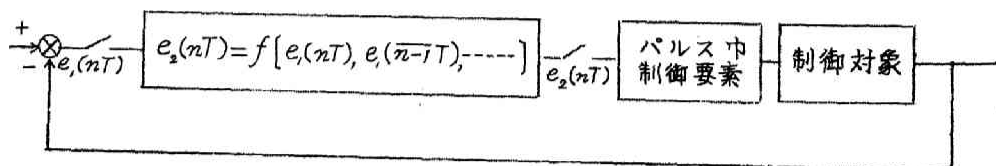
上記の様にパルス巾制御要素は非線型特性を有するから、その前に適当な非線型要素を置くこと

により、パルス巾制御要素の有する非線型性を補

償すれば良好な特性がえられるものと考えられる。パルス巾制御系の一般的な構成を第5, 1, 2図に示す。



第5, 1, 1図  
パルス巾と制御系偏差との関係



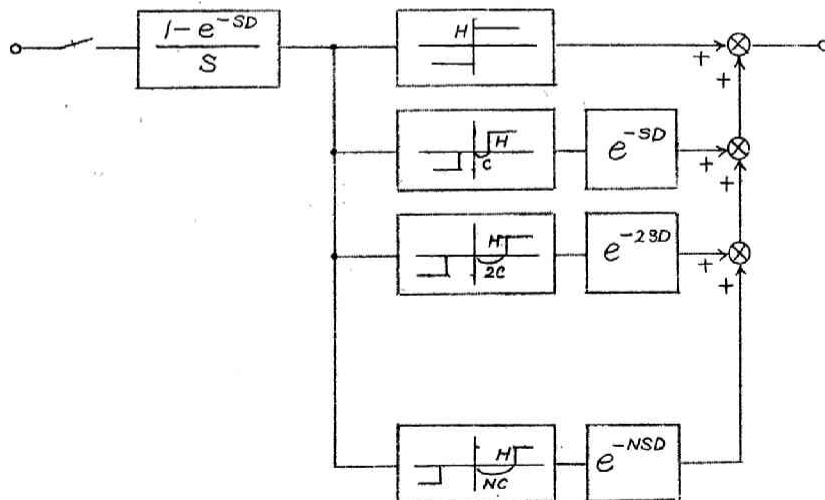
第5, 1, 2図  
パルス巾制御系の一般的構成

しかし、かかる制御系は二つの非線型要素が連続接続されるため、その統計的解析は困難である。従って、こゝではパルス巾制御要素への仿作信号は制御系偏差もしくは制御系偏差が任意の線型要素を通過した後の出力と仮定し、上記の様な非線型要素を用いた補償の可能性については階段状入力に対して行なった考察を附録Ⅲに示す。

パルス巾制御系の不規則入力に対する解析法は等価な利得を有する増巾器によりパルス巾制御要素を置換して取扱うのも一方法であろうが、サンプリング周期が制御系の時定数に比して無視出来ない場合には、パルス巾制御要素のもつむだ時間特性を考慮しなくてはならない。従って以下の解析ではパルス巾制御要素を等価な線型要素に置換することを試み、この方法を用いて簡単な例題を取扱う。

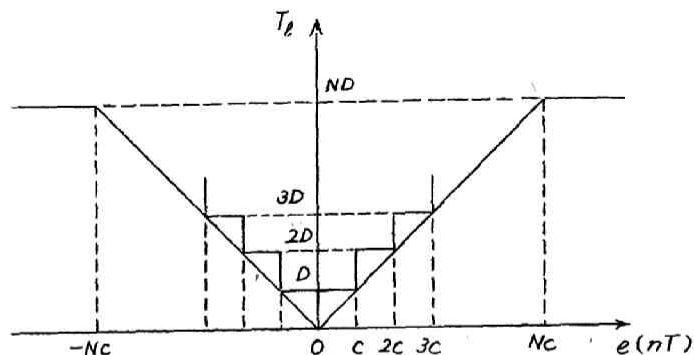
## ② パルス巾制御要素の等価線型要素による置換

パルス巾制御要素の構成を等価線型要素を導びくに適した形にして第5.2.1図に示す。



第5.2.1図

パルス巾制御要素の構成



第 5.2.2 図

第 5.2.1 図のパルス中制御要素特性

これは第 5.1.1 図に示した特性を第 5.2.2 図に示す様にサンプル点での偏差  $e(nT)$  を区間  $c$  毎に区切って  $e(nT)$  とパルス中  $T_e$  との関係を階段状に近似したことにあたる。第 5.2.1 図、第 5.2.2 図は  $|e(nT)|$  が一定値  $Nc$  より小さい間はパルス中  $T_e$  に比例する場合を示すが後述の様に一般に比例しない場合にも拡張することができる。

第 5.2.2 図において  $Nc$  を一定に保ったままで  $c \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  とすれば  $|e(nT)| \leq E$  で  $e(nT)$  と  $T_e$  とが比例し、 $|e(nT)| \geq E$  で  $T_e$  が一定なる所要の特性がえられる。ここで、

$$T = ND \quad (5.2.1)$$

$$E = Nc \quad (5.2.2)$$

とおけば  $T$  はサンプル周期であり、 $E$  はパルス中がサンプル周期と一致する場合の制御系偏差の絶対値に等しい。また  $N$  は第 5.2.1 図における並列回路数から 1 を減じたものに等しい。

さて、第 5.2.1 図の各並列回路に含まれたリレー要素を等価利得にて置換することによりパルス中制御要素を線型化してみよう。リレー要素入力の分布  $p(x)$  は分散  $\sigma^2$  の正規分布をなすものと仮定し、上から第  $(n+1)$  番目のリレー要素の等価利得<sup>(4)</sup>を  $K_{en}$  と表わせば、

$$K_{en} = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) p(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{H} \exp\left[-\frac{(n\bar{c})^2}{2}\right] \quad (5.2.3)$$

ただし  $\bar{H}$ ,  $\bar{c}$  は

$$\bar{H} \equiv H/\sigma \quad (5, 2, 4)$$

$$\bar{c} \equiv c/\sigma \quad (5, 2, 5)$$

従って第 5, 2, 1 図の各並列回路はこの等価利得  $K_{en}$  をもつ増中器と  $nD$  なる時間遅れ要素の縦続接続と考えられるので、第 5, 2, 1 図全体のインパルス応答は第 5, 2, 3 図に示す様になる。図から時間

$$t = nD \quad (5, 2, 6)$$

においては

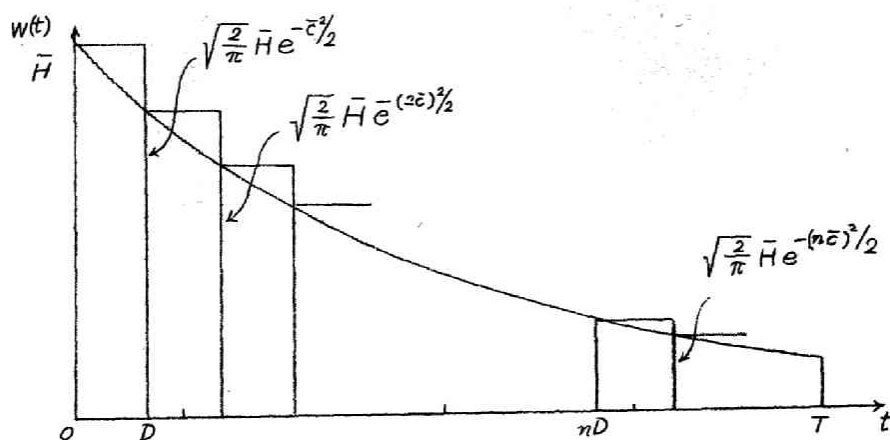
$$W(nD) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{H} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{c}}{D} \cdot nD \right\}^2 \right] \quad (5, 2, 7)$$

ここで  $\bar{E}$  を

$$\bar{E} = E/\sigma \quad (5, 2, 8)$$

と定義すれば (5, 2, 1) 式、(5, 2, 2) 式により

$$\frac{\bar{c}}{D} = \frac{\bar{E}}{T} \quad (5, 2, 9)$$



第 5, 2, 3 図

パルス中制御要素の等価インパルス応答

がえられる。(5,2,7)式で  $c \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  の極限を考えると、(5,2,9)式を用いて、

$$W(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{H} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{E}}{T}t\right)^2\right] \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5,2,10)$$

がえられる。 $t > T$  においては第 5,2,3 図より明らかな様に  $W(t)$  は零となる。

以上の様に、パルス巾制御要素の等価線型要素のインパルス応答 (5,2,10) 式を Boonton の等価利得の方法を用いて導出したが、この結果は次の様に解釈される。即ち、 $T$  なる時間間隔でサンプリングされる偏差を一般に  $e(mT)$  と表わせばパルス巾制御要素出力は一般に  $f[e(mT), t]$  なる形で表わされる。ここで  $t$  は  $e(mT)$  がサンプリングされた時刻を  $t=0$  として測り始めるものとする。上例では  $f[e(mT), t]$  は  $e(mT)$  に関して奇関数であり、 $e(mT) > 0$  に対して

$$f[e(mT), t] = \begin{cases} H & (0 \leq t \leq \min.(T, \frac{T}{E}e(mT))) \\ 0 & (\min.(T, \frac{T}{E}e(mT)) < t < T) \end{cases} \quad (5,2,11)$$

と表わされる。

このパルス巾制御要素をインパルス応答  $W(t)$  の線型要素で置換すれば  $e(mT)$  なる偏差に対する応答は  $e(mT)W(t)$  であるから、実際のパルス巾制御要素出力  $f[e(mT), t]$  との差の分散  $I$  に注目すると、

$$I = \overline{\{f[e(mT), t] - e(mT)W(t)\}^2} \quad (5,2,12)$$

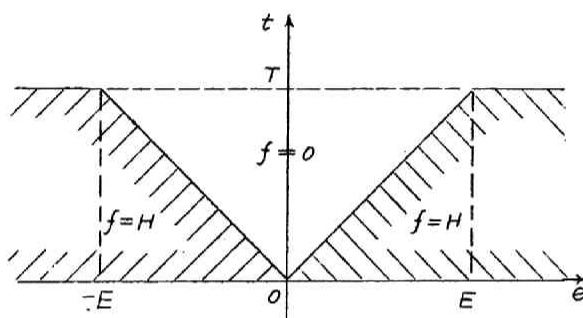
この  $I$  を最小にする様な線型要素のインパルス応答  $W(t)$  は明らかに

$$W(t) = \frac{\overline{f[e(mT), t] e(mT)}}{\overline{e(mT)^2}} \quad (5,2,13)$$

で与えられる。上式 of 分母はパルス巾制御要素入力の分散であり、分子は  $f[e(mT), t]$  なる関数および偏差  $e(mT)$  の統計的分布によって定まる。特に  $f[e(mT), t]$  として (5,2,11) 式の場合を考えると

$$\overline{f[e(mT), t] e(mT)} = \int_{-\infty}^{\infty} f[e, t] e p(e) de$$

$$= \begin{cases} 2H \int_{\frac{Et}{T}}^{\infty} e p(e) de & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases} \quad (5, 2, 14)$$



第 5, 2, 4 図

ただし  $e(mT)$  の代りに  $e$  と表わした。上式の積分限界に関しては第 5, 2, 4 図を参照のこと、ただし同図で  $f[e(mT), t]$  を  $f$  と表わした。

$p(e)$  として平均値零、分散  $\sigma^2$  の正規分布を仮定すればインパルス応答  $W(t)$  は  $(0 \leq t \leq T)$  で、

$$W(t) = 2H \int_{\frac{Et}{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right] e de / \sigma^2$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{H} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{E}}{T}t\right)^2\right] \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5, 2, 15)$$

となり、(5, 2, 10) 式に一致する。従って Booton の等価利得の考え方を  
用いて導いた等価線型要素 (5, 2, 10) 式は (5, 2, 12) 式で与えられる分散  $I$   
を最小にすることがわかった。

パルス巾が偏差に比例しない場合にも (5, 2, 13) 式を用いて容易に導び  
かれる。即ち、パルス巾  $t$  と偏差  $e$  との関係を、

$$|e| = g(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5, 2, 16)$$

と表わせば、

$$\overline{f[e(mT), t]e(mT)} = \begin{cases} 2H \int_{g(t)}^{\infty} e p(e) de & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases} \quad (5, 2, 17)$$

従って等価線型要素のインパルス応答  $W(t)$  は

$$W(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \cdot 2H \int_{g(t)}^{\infty} e p(e) de & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases} \quad (5, 2, 18)$$

と表わされる。

### [3] パルス中制御要素と制御対象のパルス伝達関数

インパルス応答  $V(t)$  の制御対象がインパルス応答  $W(t)$  の回路と縦属接続されている場合の出力のインパルス応答  $v(t)$  は

$$v(t) = \int_0^t V(t-\tau) W(\tau) d\tau \quad (5, 3, 1)$$

インパルス応答  $V(t)$  を

$$V(t) = \sum_i B_i \exp\left[-\frac{t}{T_i}\right] \quad (5, 3, 2)$$

と表わし、 $W(t)$  として (5, 2, 15) 式を用いると (5, 3, 1) 式より

$$v(t) = H\alpha \sum_i \exp\left[-\frac{t}{T_i}\right] B_i \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2T_i^2}\right) \left[ \Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{\alpha^2}{T_i}\right)\right\} + \Phi\left(\frac{\alpha}{T_i}\right) \right] \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5, 3, 3)$$

ただし

$$\alpha = \frac{T}{E} \quad (5, 3, 4)$$

であり関数  $\Phi$  は、

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left[-\eta^2/2\right] d\eta \quad (5, 3, 5)$$

で定義される。

$t > T$  に対しては  $W(t)$  は零にひとしいから (5, 3, 1) 式を用いて、

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_i B_i \int_0^T \exp\left[-\frac{1}{T}(t-\tau)\right] \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{H} \exp\left[-\tau^2/2\alpha^2\right] d\tau \\ &= \sum_i D_i \exp\left[-t/T_i\right] \quad (t > T) \quad (5, 3, 6) \end{aligned}$$

ただし、

$$D_i = \bar{H} \alpha B_i \exp\left[\frac{\alpha^2}{2T_i^2}\right] \cdot \left[ \Phi\left(\frac{T}{\alpha} - \frac{\alpha}{T_i}\right) + \Phi\left(\frac{\alpha}{T_i}\right) \right] \quad (5, 3, 7)$$

がえられる。(5, 3, 3) 式, (5, 3, 6) 式が所要のパルス巾制御要素と制御対象が縦続接続された場合のインパルス応答である。

次に、このインパルス応答を用いてそのパルス伝達関数  $G(z)$  を求めると、

$$G(z) = \frac{D_i \exp\left(-\frac{T}{T_i}\right)}{z - \exp\left(-\frac{T}{T_i}\right)} \quad (5, 3, 8)$$

をうる。拡張  $z$  変換  $G(z, m)$  も (5, 3, 3) 式, (5, 3, 6) 式から求められる。

最も簡単な場合として制御対象が一次遅れで表わされる場合には、

$$V(t) = \frac{1}{T_0} \exp\left[-\frac{t}{T_0}\right] \quad (t \geq 0) \quad (5, 3, 9)$$

(5, 3, 3) 式, (5, 3, 6) 式は各々

$$\begin{aligned} \frac{v(T_0 \tau)}{\bar{H}} &= \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{1}{2\beta^2}\right) \exp(-\tau) \left[ \Phi\left(\beta\tau - \frac{1}{\beta}\right) + \Phi\left(\frac{1}{\beta}\right) \right] \\ &\quad (0 \leq \tau < T_0) \quad (5, 3, 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v(T_0 \tau)}{\bar{H}} &= \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{1}{2\beta^2}\right) \exp(-\tau) \left[ \Phi\left(\beta\frac{T}{T_0} - \frac{1}{\beta}\right) + \Phi\left(\frac{1}{\beta}\right) \right] \\ &\quad (\tau > \frac{T}{T_0}) \quad (5, 3, 11) \end{aligned}$$

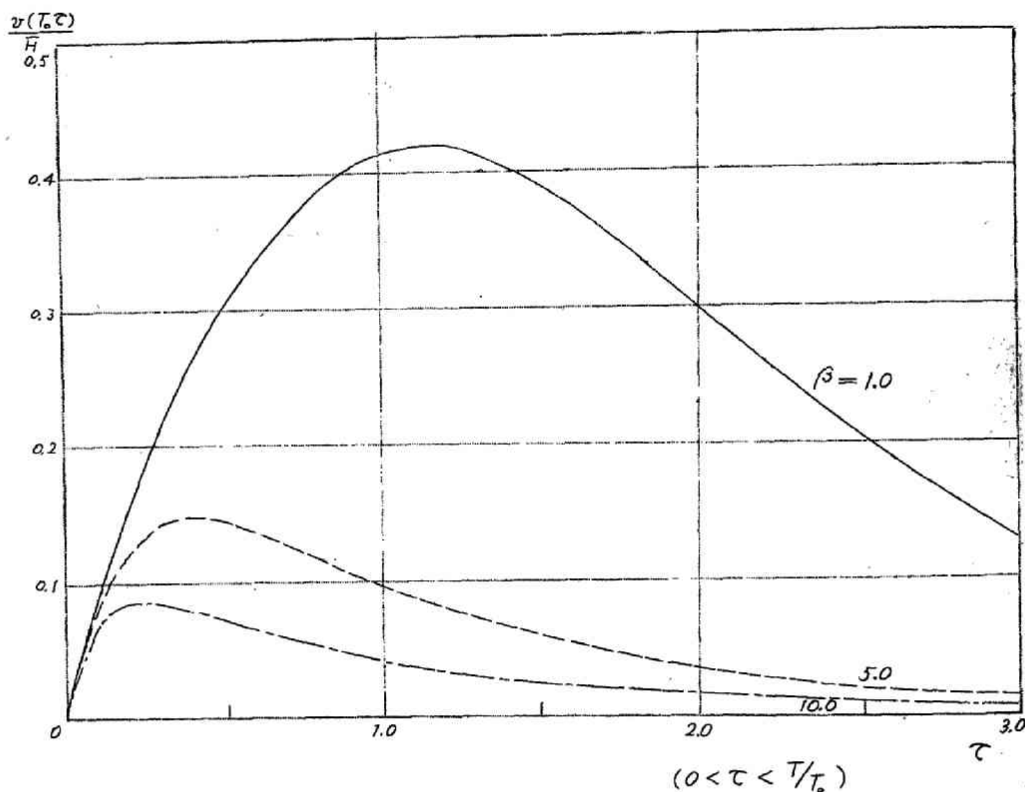
となる。ただし  $\beta$  は、



$$\tau \equiv t/T_0 \quad (5, 3, 12)$$

$$\beta \equiv T_0/\alpha \quad (5, 3, 13)$$

で与えられる。第 5, 3, 1 図は (5, 3, 10) 式を  $\tau$  の関数とし、 $\beta$  を径数として表わしたものである。



第 5, 3, 1 図

パルス巾制御要素と制御対象のインパルス応答

$\tau > \frac{T}{T_0}$  では (5, 3, 11) 式に示した様に  $v$  は  $\tau = \frac{T}{T_0}$  における値から  $\tau$  に関して  $e^{-\tau}$  に従い減少する曲線に移行する。

パルス巾制御要素と制御対象のパルス伝達関数  $G(z)$  は、

$$G(z) = D_0 \frac{\exp(-T/T_0)}{z - \exp(-T/T_0)} \quad (5, 3, 14)$$

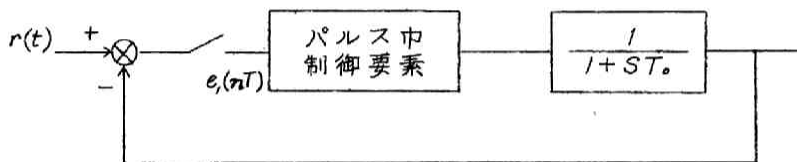
$D_0$  は

$$D_0 = \frac{\bar{H}\alpha}{T_0} \exp. \left( \frac{\alpha^2}{2T_0^2} \right) \cdot \left[ \Phi \left( \frac{T}{\alpha} - \frac{\alpha}{T_0} \right) + \Phi \left( \frac{\alpha}{T_0} \right) \right] \quad (5, 3, 15)$$

で与えられる。

#### 4 例題とその検討

第 5, 4, 1 図に示した様な簡単な制御系について考察する。制御対象のゲイン定数はパルス巾制御要素に含めて考える。



第 5, 4, 1 図

制御対象が一次遅れの場合のパルス巾制御系の構成

制御系入力  $r(t)$  の自己相関関数  $\varphi_{rr}(\tau)$  を

$$\varphi_{rr}(\tau) = \sigma_0^2 \exp. (-\alpha|\tau|) \quad (5, 4, 1)$$

と仮定する。この離散的スペクトル密度  $\Phi_{rr}(z)$  は

$$\Phi_{rr}(z) = \frac{\sigma_0^2 (1 - q^2) z}{(z - q)(1 - qz)} \quad (5, 4, 2)$$

となる。ただし  $q$  は

$$q \equiv e^{-\alpha T_0} \quad (5, 4, 3)$$

と表わされる。  $T_0$  はサンプル周期を表わす。

制御系偏差のサンプル点における分散  $\sigma^2$  は

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{単位円}} \left| \frac{1}{1 + G(z)} \right|^2 \Phi_{rr}(z) \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{\sigma_o^2}{2\pi j} \oint_{\text{単位円}} \frac{(z - e^{-T/T_o})(1 - ze^{-T/T_o}) dz}{\{z - e^{-T/T_o}(1 - D_o)\} \cdot \{1 - ze^{-T/T_o}(1 - D_o)\} (z - \bar{z})(1 - \bar{z}z)}$$

(5, 4, 4)

以下、制御系は安定なるものとすれば  $1 + G(z) = 0$  の根

$$z = (1 - D_o)e^{-T/T_o} \quad (5, 4, 5)$$

は単位円内にあることを考慮すれば、

$$\left(\frac{\sigma_o}{\sigma_o}\right)^2 = \frac{[2(e^{(\frac{T}{T_o} + \alpha T)} - 1) - (e^{2\frac{T}{T_o}} - 1)]D_o + (e^{2\frac{T}{T_o}} - 1)(e^{(\frac{T}{T_o} + \alpha T)} - 1)}{[D_o + (e^{(\frac{T}{T_o} + \alpha T)} - 1)][e^{2\frac{T}{T_o}} - (D_o - 1)^2]}$$

(5, 4, 6)

をうる。

上式は、

$$D_o = 1 + e^{T/T_o} \quad (5, 4, 7)$$

において無限大となるが、これが制御系の安定限界を示す。第5, 4, 2図に  $\alpha T_o = 1.0$  の場合につき (5, 4, 6) 式を用いて  $\sigma/\sigma_o$  を  $D_o$  の関数とし、 $T/T_o$  を径数として表わしたものを実線で示す。 $D_o > 2$  では  $\frac{\sigma}{\sigma_o} > 1$  となるが実用的でないので示していない。

一方、 $D_o$  は (5, 3, 13) 式から  $T/T_o, E, H/E$  の関数として、

$$D_o = \frac{H}{E} \cdot \frac{T}{T_o} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2\bar{E}}\left(\frac{T}{T_o}\right)^2\right\} \cdot \left[\Phi\left\{\bar{E} - \frac{1}{\bar{E}}\left(\frac{T}{T_o}\right)\right\} + \Phi\left\{\frac{1}{\bar{E}}\left(\frac{T}{T_o}\right)\right\}\right]$$

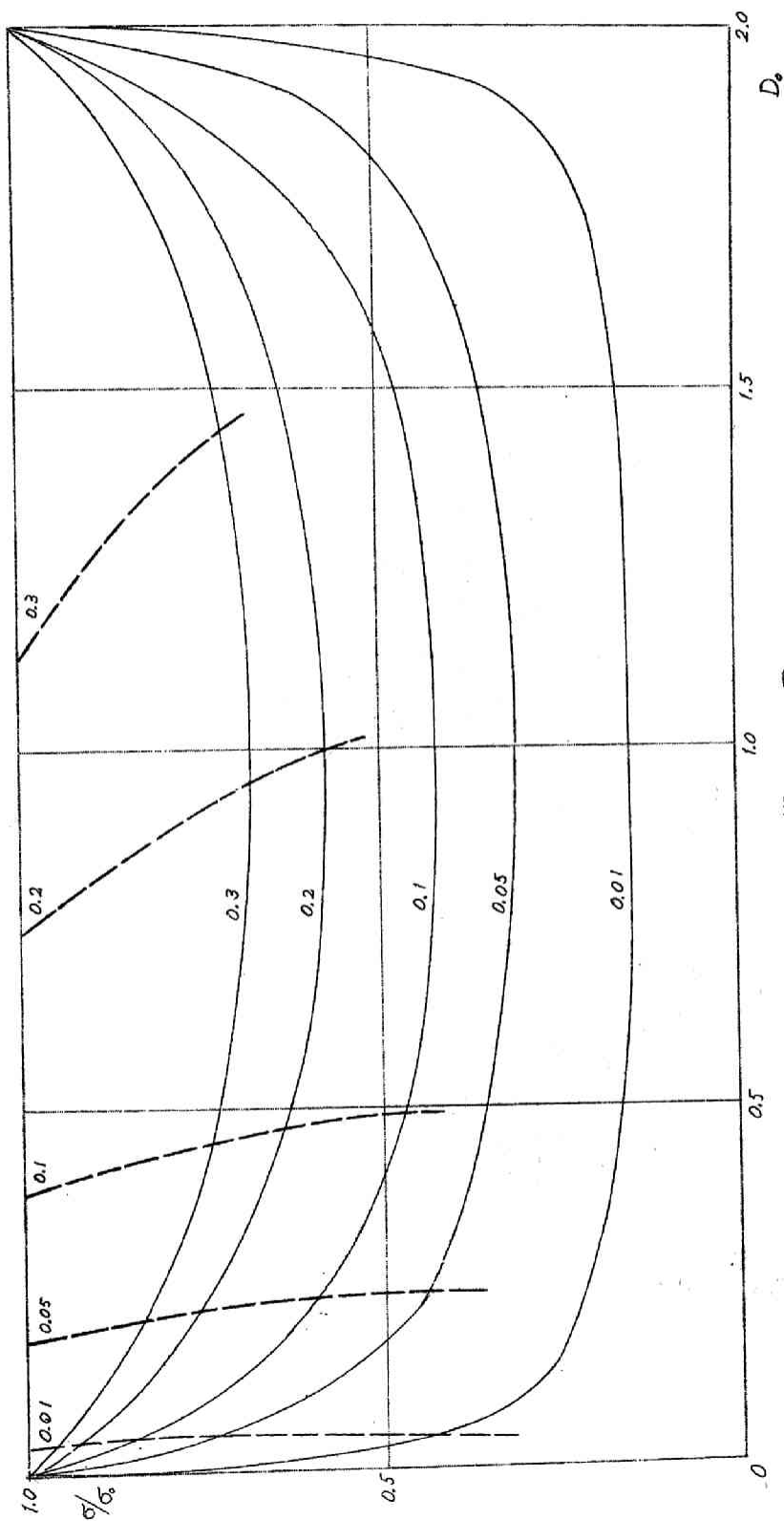
(5, 4, 8)

と表わされる。第5, 4, 3図に上式から  $D_o/(H/E)$  を  $\bar{E}$  の関数とし、 $\frac{T}{T_o}$  を径数として示す。

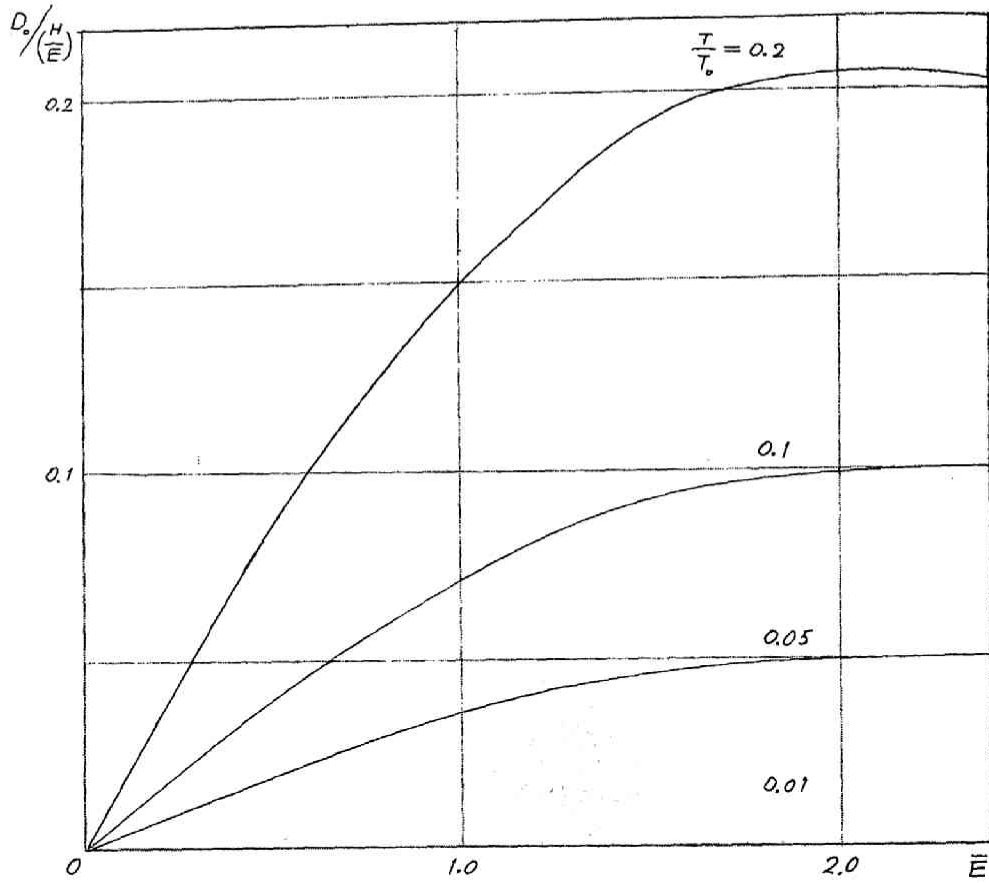
第5, 4, 2図および第5, 4, 3図を組合せ、

$$\bar{E} = \left(\frac{E}{\sigma_o}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_o}{\sigma}\right) \quad (5, 4, 9)$$

なることを考慮すれば与えられた  $E/\sigma_o$  および  $H/E$  に対し  $\frac{T}{T_o}$  を径数として  $D_o/(H/E)$  と  $\sigma/\sigma_o$  の関係が求められる。(第5, 4, 2図の点線)。所要



第 5. 4, 2 図  $\frac{E}{\sigma_0} = 1.0, \frac{H}{E} = 5.0$   
 $D_0$  と  $\sigma/\sigma_0$  の関係 ( $\alpha T_0 = 1.0$ ) の値を示す  
 図中の数字はいずれも  $\frac{T}{T_0}$  の値を示す



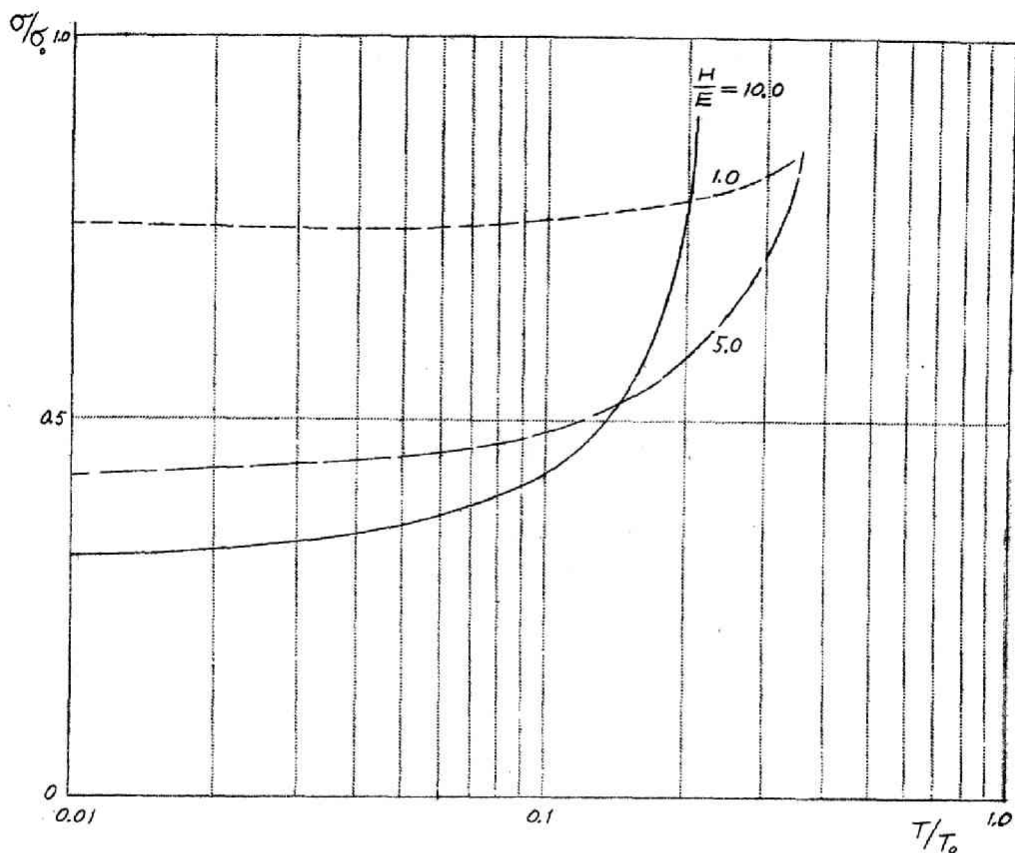
第 5, 4, 3 図

$D_o/(H/E)$  と  $\bar{E}$  の関係 ( $\alpha T_o = 1.0$ ,  $\frac{E}{\sigma_o} = 1.0$ )

の  $\sigma/\sigma_o$  と  $T/T_o$  との関係は第 5, 4, 2 図の同一の  $T/T_o$  に対する実線と点線の交点として図式的に求められる。第 5, 4, 4 図は  $\frac{E}{\sigma_o} = 1.0$  の場合について  $\sigma/\sigma_o$  を  $T/T_o$  の関数とし  $H/E$  を径数として表わしたものである。

$T/T_o$  が大きくなると不安定域に近づく、 $\sigma/\sigma_o$  は増大する。またパルス巾制御要素の利得  $H/E$  が大きくなれば安定領域では  $\sigma/\sigma_o$  は小さくなるが、その領域は狭くなる。

$\sigma/\sigma_o$  は  $\alpha T_o$  が小さくなるほど減少する。これは制御系入力の相隣るサンプル点間の相関が大きくなり不規則性が減少することから当然といえる。不規則変動が交互に  $+1$  と  $-1$  とをとり、その変動間の平均時間間



第 5, 4, 4 図

$\sigma_e/\sigma_0$  と  $T/T_0$  の関係 ( $\alpha T_0 = 1.0$ ,  $\frac{E}{\sigma_0} = 1.0$ )

隔が  $1/\alpha$  の矩形パルスとみなす場合、 $\alpha$  が小さくなると変動間の平均時間は  $\alpha$  に逆比例して増加する（ただし不規則変動の分散は一定）。

$\alpha T_0$  の小さい場合には (5, 4, 6) 式から、

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{(e^{\frac{T}{T_0}} - 1)}{(D_0 + e^{\frac{T}{T_0}} - 1)} \sqrt{1 + \frac{\alpha T e^{\frac{T}{T_0}} (1 + 2D_0)}{(e^{\frac{T}{T_0}} - 1)^2 (e^{\frac{T}{T_0}} + 1 - D_0)}} \quad (5, 4, 10)$$

がえられる。これから  $\sigma_e/\sigma_0$  は  $D_0$  の増加と共にぼゞ

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{e^{\frac{T}{T_0}} - 1}{D_0 + e^{\frac{T}{T_0}} - 1} \quad (5, 4, 11)$$

に従って減少するが安定限界

$$D_0 = 1 + e^{\frac{T}{T_0}} \quad (5, 4, 7)$$

附近で急激に増加することがわかる。

## 5 結 言

操作量が矩形パルス列からなり、そのパルス巾を変化させることにより制御を行なうパルス巾制御方式の統計的解析を行ない、パルス巾制御要素の有する非線型特性は等価線型要素に置換することにより線型化して取扱う方法で、制御対象が一次遅れ特性で表わされる場合につき考察した。

## 第六章 階段状特性を有する検出要素の制御特性に 及ぼす影響

### 1 緒 言

制御系偏差の検出部の特性が直線状でなく階段状特性を有することは、例えば巻線型ポテンシオメータを用いた場合やデジタル型の制御を行なう場合などにみられる。この階段状特性の制御特性に及ぼす影響については制御系に正弦波入力加わる場合につき解析するのとも一方法であるが、こゝでは制御系入力を不規則変動と考えて考察する。

検出部特性が階段状であるために入ってくる誤差  $x$  の統計的性質は  $W. R. Bennett^{(15)}$  により考察され、その自己相関関数はほゞ

$$\varphi_{rr}(\tau) = e^{-4\pi\sigma_x^2(1-\rho_{xx})/D^2} \quad (6, 1, 1)$$

で与えられる。こゝで  $\sigma_x^2$  は制御系偏差  $x$  の分散、 $\rho_{xx}$  は  $x$  の相関係数、 $D$  は階段の中である。これからみて  $\sigma_x/D$  が大きい場合には  $x$  は急速に白い雑音に近づくことがわかる。

この性質を利用して誤差  $x$  を制御系偏差  $x$  とは独立な白い雑音と考えて解析するのとも一近似法であるが、實際上興味のあるのは制御系偏差の分散が小さい領域であって、この場合、検出部のもつ階段状特性が制御特性に大きく影響し、かつこの領域では上記の様に誤差  $x$  を白い雑音と見做すことは困難となる。

本章では、検出部の階段状特性のために生ずる不規則な誤差を *Boaton* により与えられた等価利得を用いて解析し、階段の大きさの許容値につき考察を行なう。



## ② 等価利得を用いた解析

制御系の検出部の有する階段状特性は第 6, 2, 1 図に示すものとする。

図から明らかな様に、 $D \rightarrow 0$  においては勾配 1 の直線に近づく。この勾配が 1 でない場合には、これに続く要素の利得に繰り込むことにより検出部の特性を第 6, 2, 1 図の様におくことが出来る。

先ず、この特性の等価利得  $K_e$  を求めると、この要素の入力の分散を  $\sigma_e^2$  として、

$$K_e = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-\frac{1}{2})D}^{(n+\frac{1}{2})D} x \cdot nD \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_e^2}} dx / \sigma_e^2$$

$$= \frac{D}{\sigma_e} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{D^2}{2\sigma_e^2} (n-\frac{1}{2})^2} \quad (6, 2, 1)$$

となる。 $K_e$  は  $D/\sigma_e$  が小さいと殆んど 1 に等しい。

$D/\sigma_e$  が増すと  $K_e$  は減少するが、上記の級数は急速に収斂するので実際に興味あるこの領域では二項迄とれば充分である。

$D$  及び  $\sigma_e^2$  を制御系入力分散  $\sigma_r^2$  を用いて無次元化し、

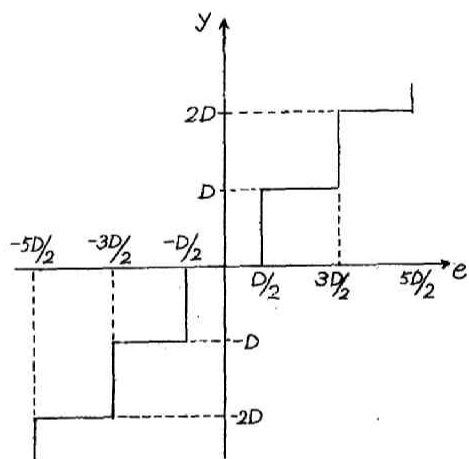
$$D^* \equiv \frac{D}{\sigma_r} \quad (6, 2, 2)$$

及び、

$$y \equiv \frac{\sigma_e}{\sigma_r} \quad (6, 2, 3)$$

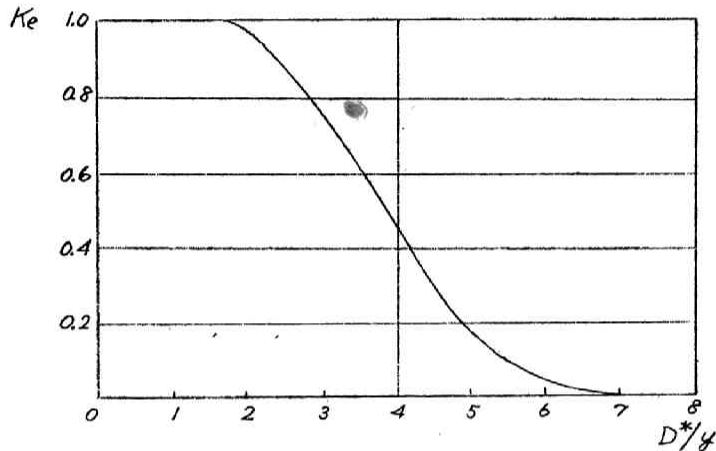
とおけば (6, 2, 1) 式は

$$K_e = \left( \frac{D^*}{y} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{D^{*2}}{2y^2} (n-\frac{1}{2})^2} \quad (6, 2, 4)$$



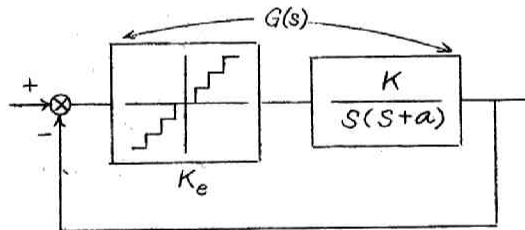
第 6, 2, 1 図  
検出要素の特性

となる。第 6, 2, 2 図は上式を用いて等価利得  $K_e$  を無次元された階段の大きさ  $D^*/y$  の関数として計算したもので  $K_e$  は  $D^*/y$  がほぼ 2.0 の付近から急速に減少することがわかる。



第 6, 2, 2 図

等価利得  $K_e$  と無次元された階段の大きさ  $D^*/y$  の関係



第 6, 2, 3 図

解析の対象とする制御系の構成

以下、第 6, 2, 3 図に示した制御系について解析する。

制御系入力と制御系偏差との間の伝達関数は

$$\frac{1}{1+G(S)} = \frac{S(S+a)}{S^2 + aS + KK_e} \quad (6, 2, 5)$$

制御系入力の自己相関関数を

$$\varphi_{rr}(\tau) = \sigma_r^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (6, 2, 6)$$

と仮定すると、その電力スペクトル密度は

$$\Phi_{rr}(S) = \frac{\sigma_r^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - S^2} ; \quad (S = j\omega) \quad (6, 2, 7)$$

従って制御系偏差の電力スペクトル密度は(6, 2, 5)式と(6, 2, 7)式とから、

$$\Phi_{ee}(S) = \frac{\alpha S^2}{\pi} \cdot \frac{c(S)c(-S)}{d(S)d(-S)} \quad (6, 2, 8)$$

ただし  $c(S)$  および  $d(S)$  は

$$c(S) = S^2 + aS \quad (6, 2, 9)$$

$$d(S) = S^3 + (a + \alpha)S^2 + (\alpha a + KK_e)S + KK_e \alpha \quad (6, 2, 10)$$

により与えられる。

(6, 2, 8)式から制御系偏差の分散  $\sigma_e^2$  は

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi_{ee}(S) dS = \frac{\alpha}{a} \sigma_r^2 \frac{\frac{KK_e}{a\alpha} + \frac{a}{\alpha} + 1}{\frac{KK_e}{a\alpha} + \frac{\alpha}{a} + 1} \quad (6, 2, 11)$$

こゝで(6, 3, 3)式で定義した  $y$  を用いると上式は、

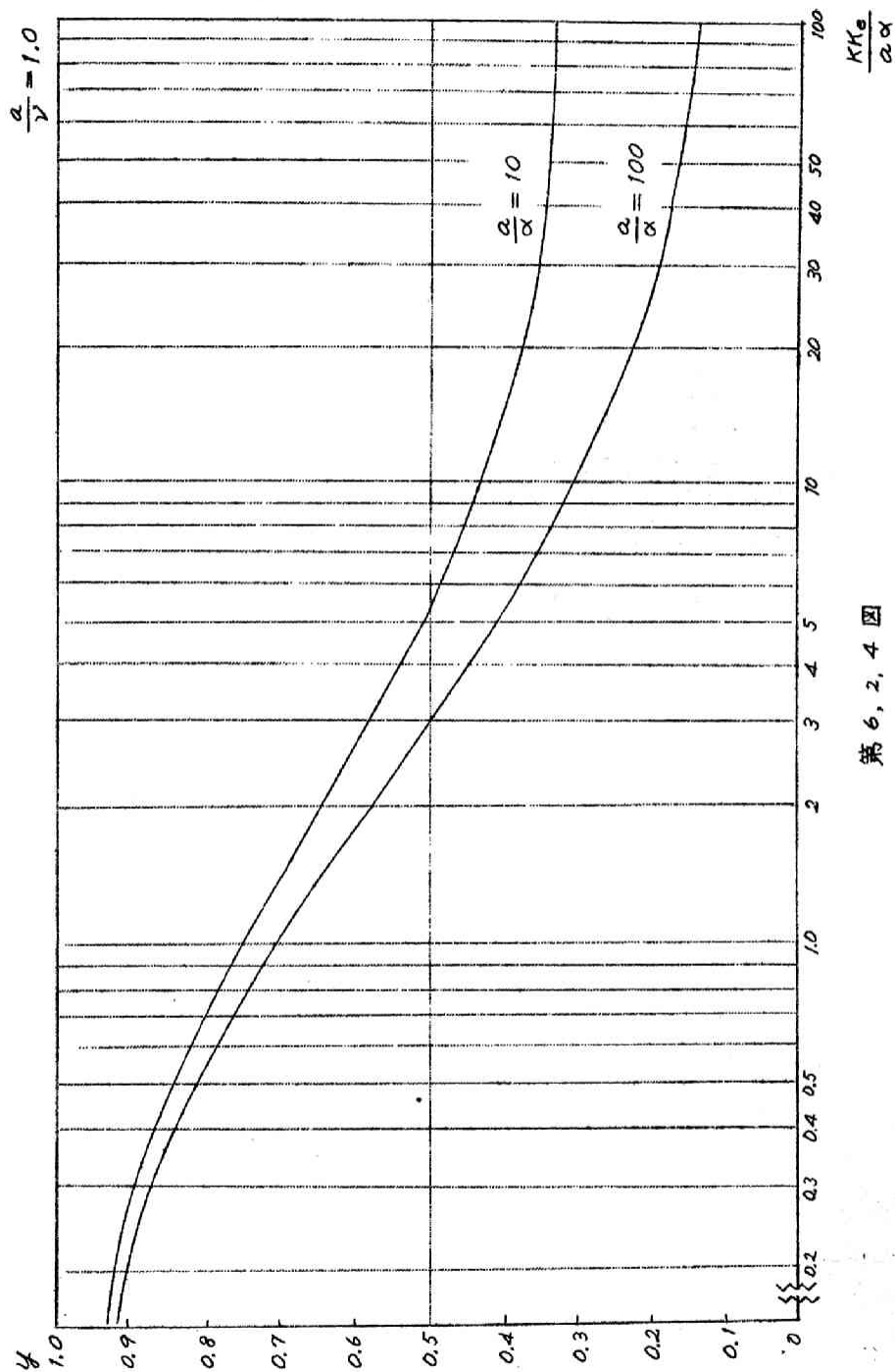
$$y = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{a}\right) \frac{\left(\frac{KK_e}{a\alpha} + \frac{a}{\alpha} + 1\right)}{\left(\frac{KK_e}{a\alpha} + \frac{\alpha}{a} + 1\right)}} \quad (6, 2, 12)$$

を得る。従って  $\frac{a}{\alpha}$  を与えると  $y$  は  $\frac{KK_e}{a\alpha}$  の関数として表すことができる。この計算結果を第6, 2, 4図に示す。

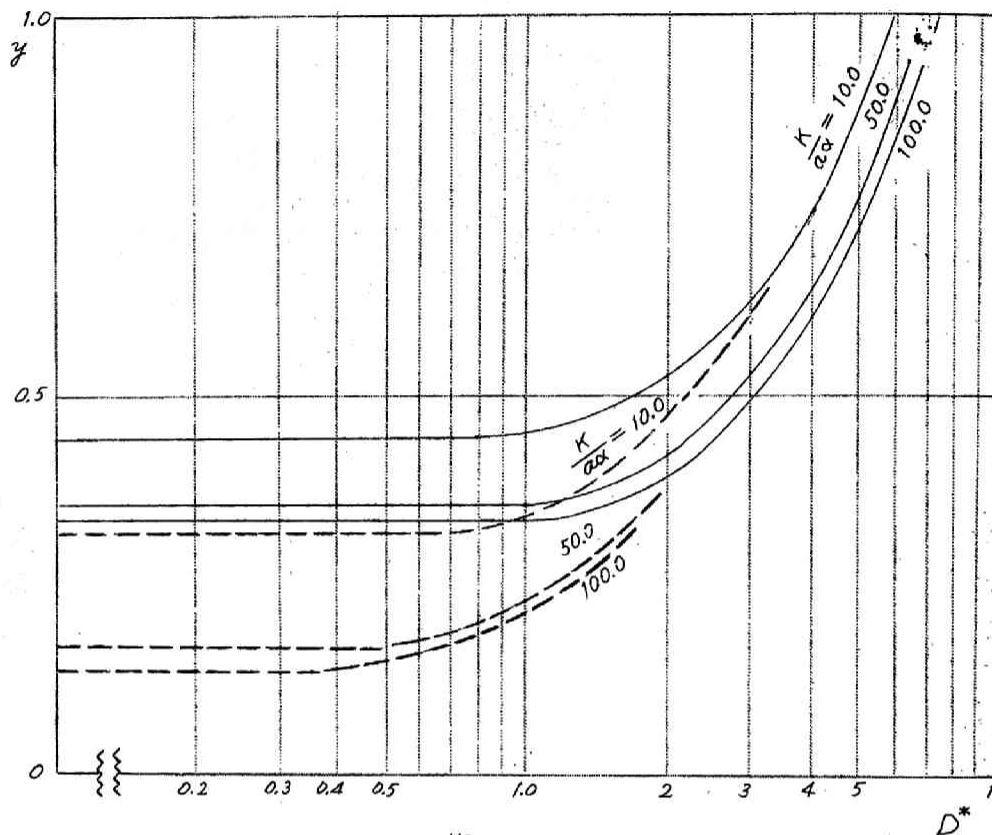
第6, 2, 2図と第6, 2, 4図から与えられた  $\frac{a}{\alpha}$  に対して検出部の階段の大きさ  $D^*$  と制御系偏差の標準偏差  $y$  (いずれも無次元量) との関係がえられる。第6, 2, 5図に  $\frac{a}{\alpha} = 10$  及び  $100$  に対して行なった計算結果を実線及び点線にて示す。

$D^* \rightarrow 0$  においても制御系偏差は零にはならず、この値は制御系入力の不規則性により定まる。

$\frac{a}{\alpha} = 10$  及び  $100$  の場合には  $D^*$  の最大値  $D^*_{max}$  は各々  $1$  及び  $0.5$  程度にとるべきであるから、 $\frac{a}{\alpha} = 10$  に対し、



第 6, 2, 4 图



第 6, 2, 5 図

制御系偏差の標準偏差  $y$  と検出部の階段の大きさ  $D^*$  との関係 (実線:  $\frac{K}{\alpha} = 10$ ; 点線:  $\frac{K}{\alpha} = 100$ )

$$D_{max.} \doteq \sigma_r \quad (6, 2, 13)$$

$\frac{a}{\alpha} = 100$  に対し

$$D_{max.} \doteq 0.5 \sigma_r \quad (6, 2, 14)$$

ととるべきである。この場合  $y$  の値は、ほぼ  $D^* = 0$  の場合の値  $y_{min.}$  にひとしい。

$\frac{a}{\alpha}$  が大きくなるほど制御系はその入力に忠実に追従可能となるため良好な制御を行なうためには  $D$  の大きさをより小さくしなくてはならない。 $D$  の合理的な許容最大値は上記の考察により決定できる。

### 3 結 言

以上の解析では検出要素が階段状特性を有する場合について、不規則変動入力に対する制御系の応答を等価利得法を用いて解析した。この結果は制御系入力の不規則性をも考慮した検出要素の設計上有益なるものと考えられる。

## 第七章 バックラッシュを含む制御系の解析<sup>(6)</sup>

### 1 緒 言

ヒステリシスやバックラッシュ等の履歴現象を有する非線型要素を含む制御系の不規則変動入力に対する応答の解析は一般に困難である。これは非線型要素が有する履歴現象のため、その出力が入力によって一義的に決まらぬためである。従ってその解析法としては何らかのモデルにより非線型要素を置換し履歴現象を有しないものとして取扱うのが有望と考えられる。以下の考察では最も簡単な場合としてバックラッシュを含む場合について考察し、これを近似的に振巾特性は線型であるが、一種の時間遅れを与える要素と見做して取扱う。

### 2 バック ラッシュを有する制御系の解析(1)

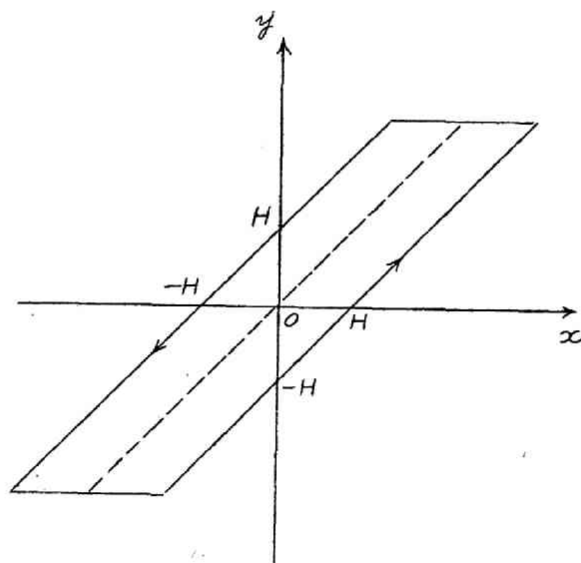
前述の様にバックラッシュの如く履歴現象を呈する非線型要素は、その出力が入力により一義的に決まらぬため、その厳密な理論的解析が困難である。

こゝでは第 7, 2, 1 図に示すバックラッシュを次の様なモデルで置換する。

$$y(t) = \begin{cases} x(t) - H & (x'(t) > 0) \\ x(t) + H & (x'(t) < 0) \end{cases} \quad (7, 2, 1)$$

ただし  $x(t)$  及び  $y(t)$  は各々バックラッシュの入、出力を表わす。また  $H$  は第 7, 2, 1 図に示す様にバックラッシュの中の半分である。

この様に置換したバックラッシュは履歴現象は呈しないが、尚非線型特性を有するため、更にこれを線型要素に置換する必要がある。このため、本節では (7, 2, 1) 式で示されるバックラッシュのモデルを等価時間遅れ  $D$  を有する要素にて置換して取扱う。時間遅れ  $D$  の大きさを決める基準は



第 7.2.1 図

$$I = \{x(t-D) - y(t)\}^2 \quad (7.2.2)$$

を最小ならしめる様にとるものとする。

(7.2.2) 式は展開して、

$$I = \overline{x(t-D)^2} - 2 \overline{x(t-D)y(t)} + \overline{y(t)^2} \quad (7.2.3)$$

となるが、(7.2.1) 式から、

$$\overline{y(t)^2} - H^2 = \overline{x^2(t-D)} = \varphi_{xx}(0) \quad (7.2.4)$$

が成立する。ただし  $\varphi_{xx}(0)$  はバックラッシュ入力の分散である。

(7.2.3) 式第二項はバックラッシュ入力が正規確率過程に従うものとするれば計算出来る。

即ち  $x'(t)$ ,  $x(t)$  及び  $x(t-D)$  の同時確率密度関数  $p(x'(t), x(t), x(t-D))$  を用いて、

$$\overline{x(t-D)y(t)} = \int_0^\infty dx'(t) \int_{-\infty}^\infty dx(t) \{x(t) - H\} \int_{-\infty}^\infty dx(t-D)$$



$$\begin{aligned}
& \times \{x(t-D)\} p(x'(t), x(t), x(t-D)) + \int_{-\infty}^0 dx'(t) \int_{-\infty}^{\infty} dx(t) \\
& \times \{x(t)+H\} \int_{-\infty}^{\infty} dx(t-D) \{x(t-D)\} p(x'(t), x(t), x(t-D)) \\
& = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx'(t) \int_{-\infty}^{\infty} dx(t) \{x(t)-H\} \int_{-\infty}^{\infty} dx(t-D) \{x(t-D)\} \\
& \times p(x'(t), x(t), x(t-D)) \quad (7, 2, 5)
\end{aligned}$$

$p(x'(t), x(t), x(t-D))$  の特性関数を利用して計算すると、

$$\overline{x(t-D)y(t)} = \varphi_{xx}(D) - H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varphi'_{xx}(D)}{\sqrt{-\varphi''_{xx}(0)}} \quad (7, 2, 6)$$

ここで  $\varphi_{xx}(\tau)$  はバックラッシュ入力の相関関数を示す。上式を(7, 2, 3)式に用い(7, 2, 4)式を考慮すれば、

$$I = 2 \left\{ \varphi_{xx}(0) - \varphi_{xx}(D) + H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varphi'_{xx}(D)}{\sqrt{-\varphi''_{xx}(0)}} \right\} + H^2 \quad (7, 2, 7)$$

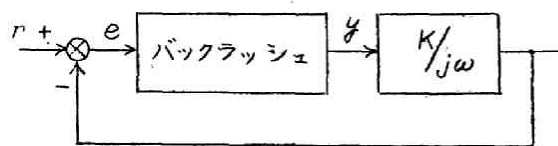
をうる。等価時間遅れ  $D$  は上式を最小にするものであるから、

$$\varphi'_{xx}(D) = H \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varphi''_{xx}(D)}{\sqrt{-\varphi''_{xx}(0)}} \quad (7, 2, 8)$$

を満足する。

解析に用いた制御系を第7, 2, 2図に示す。

制御系入力  $r$  の電力スペクトル密度  $\Phi_{rr}(j\omega)$  は



第7, 2, 2図

$$\Phi_{rr}(j\omega) = \frac{2\sigma_r^2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad (7, 2, 9)$$

と仮定する。制御系偏差  $e$  の電力スペクトル密度  $\Phi_{ee}(j\omega)$  は

$$\Phi_{ee}(j\omega) = |Y(j\omega)|^2 \Phi_{rr}(j\omega) \quad (7, 2, 10)$$

たゞし

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1 + e^{-j\omega D} \cdot \frac{K}{j\omega}} \quad (7, 2, 11)$$

また制御系偏差  $e$  の相関関数  $\varphi_{ee}(\tau)$  は

$$\varphi_{ee}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ee}(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + e^{-j\omega D} \frac{K}{j\omega}} \right|^2 \Phi_{rr}(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (7, 2, 12)$$

上式中の  $e^{-j\omega D}$  はテイラー展開により  $j\omega D$  につき3次の項までとると、

$$e^{-j\omega D} \doteq 1 - j\omega D - \frac{1}{2} \omega^2 D^2 - \frac{j}{6} \omega^3 D^3 \quad (7, 2, 13)$$

上式と (7, 2, 9) 式を用いて、

$$\varphi_{ee}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \Phi_{rr}(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega}{K^2 + (1 - 2KD)\omega^2 + \frac{1}{3}KD^3\omega^4} \quad (7, 2, 14)$$

上式中  $\omega^2 / \{K^2 + (1 - 2KD)\omega^2 + \frac{1}{3}KD^3\omega^4\}$  は制御系の特性で定まる。

これを  $K=5, D=0, 0.1,$

$0.2$  について計算した結

果を第 7, 2, 3 図に点線で

示す。(7, 2, 13) 式の近似

を用いない場合には

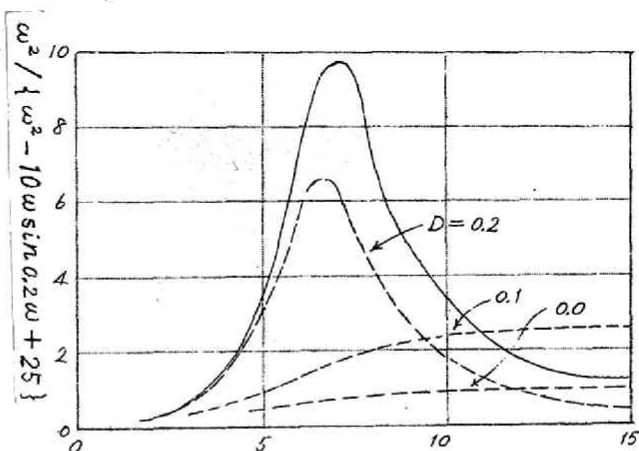
$$\omega^2 / \{\omega^2 - 2K\omega \sin \omega D + K^2\}$$

となるが、これを  $D=0.2$

( $K=5$ ) について計算し

た結果を第 7, 2, 3 図に実

線で示す。

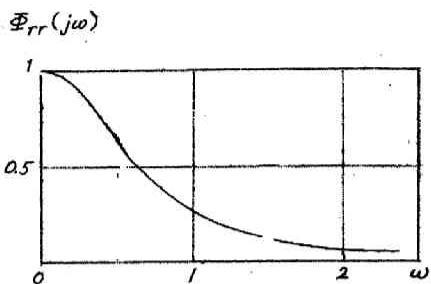


第 7, 2, 3 図

$\omega$  が大きい領域ではかなりの誤差を生ずるが、制御系入力が高周波成分を含まなければ、この誤差は少なくなる。制御系入力の電力スペクトル密度が (7, 2, 10) 式で表わされる場合には (第 7, 2, 4 図参照)、(7, 2, 14) 式の被積分項

$$\frac{\omega^2 \Phi_{rr}(j\omega)}{K^2 + (1 - 2KD)\omega^2 + \frac{1}{3}KD^3\omega^4}$$

は第 7, 2, 5 図に示す様になる。(7, 2, 13) 式を用いない場合を二点鎖線にて示す( $D=2.0$ )。これからみて  $D < 2.0$  では(7, 2, 14)式を用いて近似しても大きい誤差は入らないと考えられる。

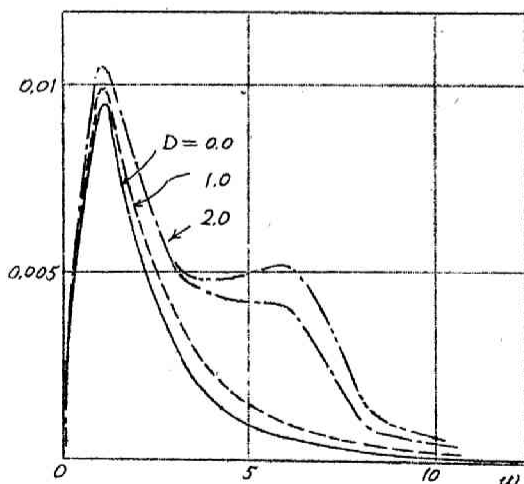


第 7, 2, 4 図  
制御系入力の電力スペクトル密度

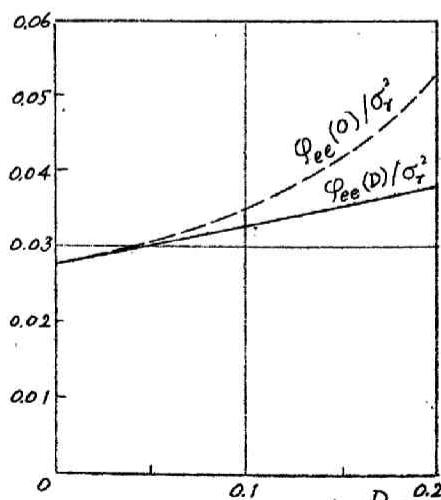
(7, 2, 14) 式を  $K=5$  の場合について計算した  $\varphi_{ee}(0)/\sigma_r^2$  及び  $\varphi_{ee}(D)/\sigma_r^2$  を第 7, 2, 6 図に、また  $-\varphi_{ee}''(0)/\sigma_r^2$  を第 7, 2, 7 図に、 $\varphi_{ee}'(D)/\sigma_r^2$  を第 7, 2, 8 図に示す。

これらの関係を用いると(7, 2, 7)式から  $I$  (もしくは  $I/\sigma_r^2$ ) と  $D$  との関係が図式的にえられる。第 7, 2, 9 図にその計算結果を示す。

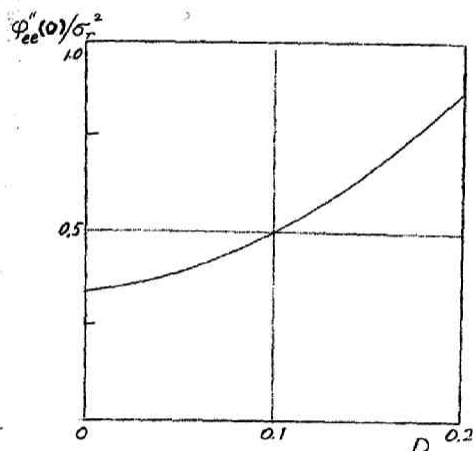
この様に与えられた  $H/\sigma_r$  に対して、ある時間遅れ  $D$  において  $I/\sigma_r^2$  は最小値をとることがわかる。この  $D$  の値をバックラッシュの等価時間遅れとし、第 7, 2, 9 図を用いて等価時間遅れ  $D$  とバックラッシュの中の半分  $H/\sigma_r$  (無次元量) との関係を求めると第 7, 2, 10 図の関係を



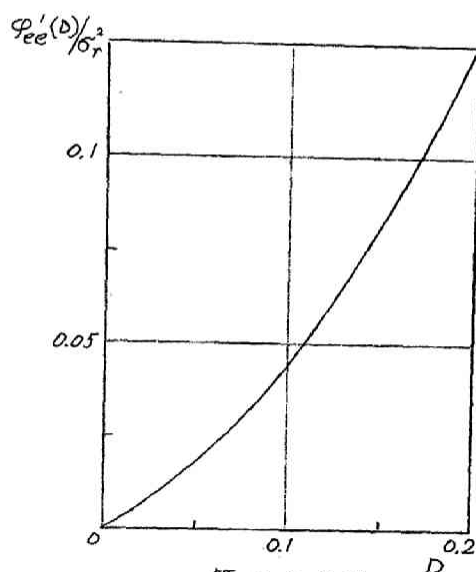
第 7, 2, 5 図



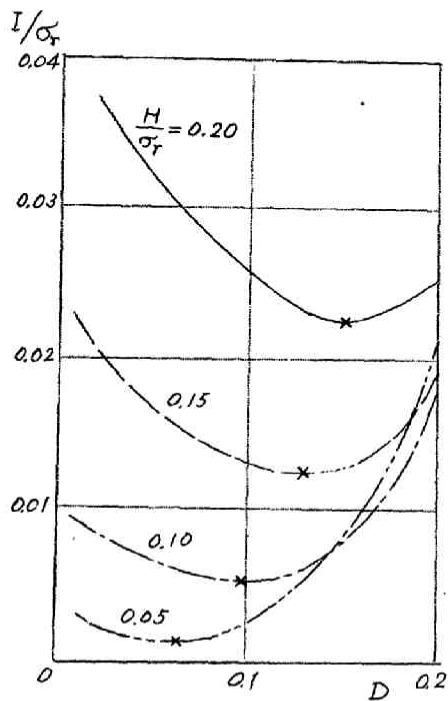
第 7, 2, 6 図



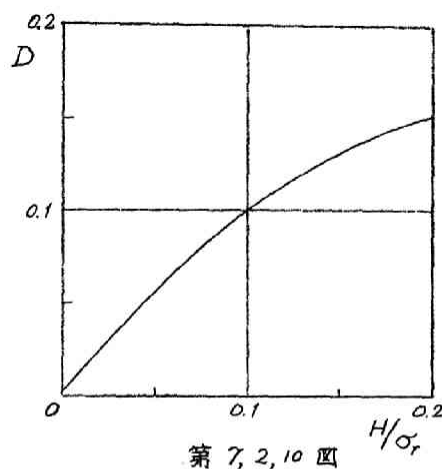
第 7, 2, 7 図



第 7, 2, 8 図



第 7, 2, 9 図



第 7, 2, 10 図

うる。

この第 7, 2, 10 図と第 7, 2, 6 図を用いると  $H/\sigma_r$  と制御系偏差の標準偏差  $\sqrt{\varphi_{ee}(0)}/\sigma_r$  (無次元量) との関係として第 7, 2, 11 図の実線で示される関係がえられる。

以上の解析法は、まずバックラッシュを (7, 2, 1) 式で示されるモデル

ルにて置換するのであるが、バックラッシュの巾がその入力に比して大きい場合には、この様なモデルでは十分に説明できないものと考えられる。

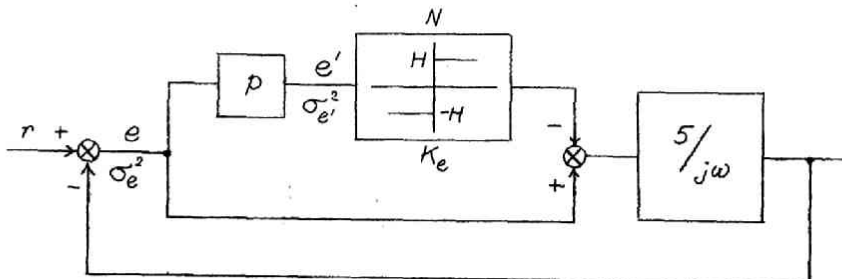
### 3 バックラッシュを有する制御系の解析(2)

前節ではバックラッシュを(7, 2, 1)式で表わされるモデルに置換して解析したが、本節では *Boaton* により定義された等価利得を用いて解析する。

バックラッシュを前述のモデルで置換した場合の等価回路として、第7, 3, 1図について考察する。この回路は非線型要素  $N$  を有しているがこれを線型化して取扱うことにし、その等価利得を  $K_e$  とする。 $K_e$  は入力の分散を  $\sigma_{e'}^2$  とすれば

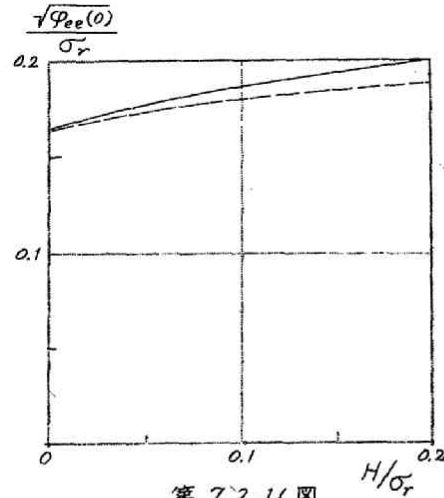
$$K_e = \frac{H}{\sqrt{2\pi} \sigma_{e'}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma_{e'}^2}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{\sigma_{e'}} \quad (7, 3, 1)$$

により与えられる。



第7, 3, 1図

$e'$  と  $r$  との間の伝達関数  $Y(j\omega)$  は、



第7, 2, 11図  
バックラッシュの巾と制御系偏差の標準偏差

$$Y(j\omega) = \frac{-\omega^2}{5 + j\omega(1 - 5K_e)} \quad (7, 3, 2)$$

であるから、 $r$ の電力スペクトル密度  $\Phi_{rr}(j\omega)$  が (7, 2, 9) 式で与えられるとすると  $e'$  の電力スペクトル密度  $\Phi_{e'e'}(j\omega)$  は

$$\Phi_{e'e'}(j\omega) = \frac{2\sigma_r^2}{\pi(1+\omega^2)^2} \left| \frac{-\omega^2}{5 + j\omega(1 - 5K_e)} \right|^2 \quad (7, 3, 3)$$

$e'$  の分散  $\sigma_{e'}^2$  は

$$\begin{aligned} \sigma_{e'}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{e'e'}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{2\sigma_r^2 d_1}{d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3)} \end{aligned} \quad (7, 3, 4)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= 5 \\ d_1 &= 10 + a \\ d_2 &= 5 + 2a \\ d_3 &= a \end{aligned} \right\} \quad (7, 3, 5)$$

(7, 3, 1) 式と組合わせると、

$$\frac{H}{\sigma_r} = \sqrt{\frac{\pi d_1}{d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3)}} \cdot K_e \quad (7, 3, 6)$$

がえられる。上式はバックラッシュの巾と非線型要素の等価利得  $K_e$  との関係を示す。与えられた  $H/\sigma_r$  に対して、上式で定まる  $K_e$  を用いて制御系偏差  $e$  の分散  $\sigma_e^2$  が求められる。即ち  $e$  の有する電力スペクトル密度  $\Phi_{ee}(j\omega)$  は

$$\Phi_{ee}(j\omega) = \frac{2\sigma_r^2}{\pi(1+\omega^2)^2} \cdot \left| \frac{j\omega}{5 + j(1 - 5K_e)\omega} \right|^2 \quad (7, 3, 7)$$

であるから、

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ee}(j\omega) d\omega = \frac{2\sigma_r^2}{(d_1 d_2 - d_0 d_3)} \quad (7, 3, 8)$$

或いは、

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \sqrt{\frac{2}{d_1 d_2 - d_0 d_3}} \quad (7, 3, 9)$$

がえられる。(7, 3, 6) 式と (7, 3, 9) 式により与えられた  $H/\sigma_r$  に対して  $\sigma_e/\sigma_r$  が求められる。 $K=5$  に対して行なった計算結果を第 7, 2, 11 図に点線で示す。[2] 節で行なった解析結果より少し小さい  $\sigma_e/\sigma_r$  を与えることがわかる。

## 4 結 言

以上、バックラッシュの場合の取扱いについて考察したが、ヒステリシス特性の様な場合には飽和現象を呈するので振巾特性も非線型として取扱う必要があるため等価利得  $K_{eq}$  及び等価時間遅れ  $D$  を導入して  $K_{eq} x(t-D)$  の様な要素に置換する必要があると考えられる。またバックラッシュの場合でも、その入力の分散がバックラッシュの巾に比して小さい場合にも振巾特性は非線型性をもつので、この領域では上記の解析は正確ではない。

## 第八章 周期的断続回路の不規則変動入力に対する応答の解析<sup>(97)</sup>

### 1 緒 言

周期的断続回路の解析は規則的入力に対して種々行なわれており、自動制御の分野では近來、研究が進められているサンプル値制御系は周期的断続回路の一例である。サンプル値制御系ではサンプラが非常に短い時間だけ附く様な場合には所謂変換法により解析されることは衆知の処であり、この理論は不規則変動入力に対しても確立された。

しかし、サンプラが有限時間附く様な制御系に対して、不規則変動入力に対する応答はまだ解析が進められていない様である。この場合、不規則変動入力が定常性を有していても周期的なサンプラの開閉により、周期的に統計的性質が変化する不規則変動を生ずるためその解析は複雑となる。

本章では、一般的な周期的断続回路に対して適用可能な不規則変動に対する応答の解析法に関して考察し、これを用いて簡単な例題について数値的検討を加える。

### 2 周期的断続回路の解析

本節では林重憲教授の発表された断続回路の理論<sup>(3)</sup>の不規則変動入力の場合に対する適用について考察する。回路状態は簡単のために第一回路状態と第二回路状態が存在するものとする。文献(3)によれば第 $n$ 段階に属する第一回路状態に対して、

$$\begin{bmatrix} i_{1n}(t) \\ v_{1n}(t) \end{bmatrix} = [\eta_{1,n}(t)] + [\alpha_1(t)] \begin{bmatrix} i_{1n}^{-0} \\ v_{1n}^{-0} \end{bmatrix} \quad (8, 2, 1)$$

第二回路状態に対して、

$$\begin{bmatrix} i_{2n}(t) \\ v_{2n}(t) \end{bmatrix} = [\eta_{2,n}(t)] + [\alpha_2(t)] \begin{bmatrix} i_{2n}^{-0} \\ v_{2n}^{-0} \end{bmatrix} \quad (8, 2, 2)$$



が成立する。ただし  $[\eta_{r,n}(t)]$  及び  $[\chi_r(t)]$  (ただし  $r=1, 2$ ) は次の諸式で定義される。

$$\mathcal{F}[F_r(p)] \begin{bmatrix} [E_{r,n}(p)] \\ [S_{r,n}(p)] \end{bmatrix} = [\eta_{r,n}(t)] \quad (r=1, 2) \quad (8, 2, 3)$$

$$\mathcal{F}[F_r(p)] p = [f_r(t)] \quad (8, 2, 4)$$

$$[F_r(p)] = \begin{bmatrix} [Z_r(p)], [\lambda_r] \\ [\mu_r], [Y_r(p)] \end{bmatrix}^{-1} \quad (8, 2, 5)$$

$$[\chi_r(t)] = [f_r(t)] \begin{bmatrix} [L_r^{-0}], [0] \\ [0], [C_r^{-0}] \end{bmatrix} \quad (8, 2, 6)$$

また、第一及び第二回路状態の初期値の間には、

$$\begin{bmatrix} [i_{2n}^{-0}] \\ [v_{2n}^{-0}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [i_{1n}] \\ [v_{1n}] \end{bmatrix}_{t=t_{1n}} \quad (8, 2, 7)$$

及び、

$$\begin{bmatrix} [i_{1n}^{-0}] \\ [v_{1n}^{-0}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [i_{2,n-1}] \\ [v_{2,n-1}] \end{bmatrix}_{t=t_{2,n-1}} \quad (8, 2, 8)$$

が成立する。従って第1回路状態に対して、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [i_{1n}^{-0}] \\ [v_{1n}^{-0}] \end{bmatrix} &= [\eta_2(t_{2,n-1})] + [\chi_2(t_{2,n-1})][\eta_1(t_{1,n-1})] \\ &+ [\chi_2(t_{2,n-1})][\chi_1(t_{1,n-1})][\eta_2(t_{2,n-2})] + \dots + [\chi_2(t_{2,n-1})][\chi_1(t_{1,n-1})] \\ &\times [\chi_1(t_{1,2})][\chi_2(t_{2,1})][\eta_1(t_{1,1})] + [\chi_2(t_{2,n-1})][\chi_1(t_{1,n-1})] \\ &\dots [\chi_2(t_{2,1})][\chi_1(t_{1,1})] \begin{bmatrix} [i_{11}^{-0}] \\ [v_{11}^{-0}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8, 2, 9)$$

が成立する。第一、第二回路状態の継続時間は段階数  $n$  に無関係に  $t_1$

及び  $t_2$  とし  $[i_{in}^{-0}] = [v_{in}^{-0}] = [0]$  と仮定すれば、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [i_{in}^{-0}] \\ [v_{in}^{-0}] \end{bmatrix} &= \{ [\eta_{2,(n-1)}(t_2)] + [\chi_2(t_2)] [\eta_{1,(n-1)}(t_1)] \} \\ &\quad + [B_1] \{ [\eta_{2,(n-2)}(t_2)] + [\chi_2(t_2)] [\eta_{1,(n-2)}(t_1)] \} \\ &\quad + \dots + [B_1]^{n-2} \{ [\eta_{2,1}(t_2)] + [\chi_2(t_2)] [\eta_{1,1}(t_1)] \} \end{aligned} \quad (8, 2, 10)$$

ただし  $[B_1]$  は次式で与えられる。

$$[B_1] = [\chi_2(t_2)] [\chi_1(t_1)] \quad (8, 2, 11)$$

(8, 2, 10) 式を (8, 2, 1) 式に用いると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [i_{in}(t)] \\ [v_{in}(t)] \end{bmatrix} &= [\eta_{1,n}(t)] + [\chi_1(t)] \sum_{k=0}^{n-2} [B_1]^k \{ [\eta_{2,(n-1-k)}(t_2)] \\ &\quad + [\chi_2(t_2)] [\eta_{1,(n-1-k)}(t_2)] \} \end{aligned} \quad (8, 2, 12)$$

がえられる。

さて  $\begin{bmatrix} [i_{in}(t)], [0] \\ [v_{in}(t)], [0] \end{bmatrix}$  なる正方行列、及び全部の元素が 1 に等しい正方行列  $[N]$  を用いると回路の各電流  $i_{ink}(t)$ 、電圧  $v_{ine}(t)$  間の積から成る行列がえられる。

即ち、

$$\begin{bmatrix} [i_{ink}(t)i_{ine}(t')], [i_{ink}(t)v_{ine}(t')] \\ [v_{ink}(t)i_{ine}(t')], [v_{ink}(t)v_{ine}(t')] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [i_{in}(t)], [0] \\ [v_{in}(t)], [0] \end{bmatrix} [N] \begin{bmatrix} [i_{in}(t')], [0] \\ [v_{in}(t')], [0] \end{bmatrix}^T \quad (8, 2, 13)$$

ただし  $[\ ]^T$  はその行列の転置を示すものとする。

上式のアンサンブル平均をとれば各電流電圧間の相関関数よりなる行列  $[\varphi_{(l,n;j,l,n)}(t,t')]$  がえられる。即ち、

$$[\varphi_{(l,n;j,l,n)}(t,t')] = \left\langle \begin{bmatrix} [i_{in}(t)], [0] \\ [v_{in}(t)], [0] \end{bmatrix} [N] \begin{bmatrix} [i_{in}(t')], [0] \\ [v_{in}(t')], [0] \end{bmatrix}^T \right\rangle \quad (8, 2, 14)$$

こゝで上式右辺に (8, 2, 12) 式を用いて計算すれば、

$$\begin{aligned} [\varphi_{(l,n;l,n)}(t,t')] &= [\varphi_{(l,n)}(t,t')] + [\varphi_{(l,2(n,n))}(t,t')] \\ &\quad + [\varphi_{(l,2(n,n))}(t',t)]^T \end{aligned} \quad (8, 2, 15)$$

たゞし

$$\begin{aligned} [\varphi_{(l,n)}(t,t')] &= [\psi_{(l,n;l,n)}(t,t')] + [\chi_1(t)] \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\ell=0}^{n-2} \{ [B_1]^k \\ &\times [\psi_{(2,n-1-k;2,n-1-\ell)}(t_2,t_2)] [B_1]^{T\ell} [\chi_1(t')]^T + [\chi_1(t)] \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\ell=0}^{n-2} \{ [B_1]^k [\chi_2(t_2)] \\ &\times [\psi_{(l,n-1-k;l,n-1-\ell)}(t_1,t_1)] [\chi_2(t_2)]^T [B_1]^{T\ell} \} [\chi_1(t')]^T \quad (8, 2, 16) \\ [\varphi_{(l,2(n,n))}(t,t')] &= [\chi_1(t)] \sum_{k=0}^{n-1} [B_1]^k [\chi_2(t_2)] [\psi_{(l,n-1-k;l,n)}(t,t')] \\ &\quad + [\chi_1(t)] \sum_{k=0}^{n-2} [B_1]^k [\psi_{(2,n-1-k;l,n)}(t_2,t')] \\ &\quad + [\chi_1(t)] \sum_{\ell=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} [B_1]^k [\chi_2(t_2)] [\psi_{(l,n-1-k;2,n-1-\ell)}(t_1,t_2)] [B_1]^{T\ell} [\chi_1(t')]^T \end{aligned} \quad (8, 2, 17)$$

こゝで一般に  $[\psi_{(a,n-u;b,n-v)}(t,t')]$  は次式で定義される行列である。

$$\begin{aligned} &[\psi_{(a,n-u;b,n-v)}(t,t')] \\ &\equiv \tilde{\rho}_{p,t} \tilde{\rho}_{q,t'} [F_a(p)] [\Phi_{(a,n-u;b,n-v)}(p,q)] [F_b(q)]^T \end{aligned} \quad (8, 2, 18)$$

( $a, b = 1, 2$ )

で与えられる。たゞし  $\tilde{\rho}_{p,t}$  及び  $\tilde{\rho}_{q,t'}$  は演算子  $p$  及び  $q$  を各  $t$  及び  $t'$  に変換することを示す。また  $[\Phi_{(a,n-u;b,n-v)}(p,q)]$  は  $a$  回路状態にある第  $n-u$  段階の電流電圧源と  $b$  回路状態にある第  $n-v$  段階の電流電圧源から作られる相関関数の行列 (演算子関数) で次式で与えられる。

$$[\Phi_{(a,n-u;b,n-v)}(p,q)] = \begin{bmatrix} \langle E_{a,n-u}(p) E_{b,n-v}(q) \rangle, & \langle E_{a,n-u}(p) S_{b,n-v}(q) \rangle \\ \langle S_{a,n-u}(p) E_{b,n-v}(q) \rangle, & \langle S_{a,n-u}(p) S_{b,n-v}(q) \rangle \end{bmatrix} \quad (8, 2, 19)$$

この行列は各電流電圧源の電流電圧間の相関関数によって定まる。即ち例えば、

$$[<E_{a,n-u}(p)E_{b,n-v}(q)>]=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(pt+qt_2)}[\varphi_{e_{a,n-u}e_{b,n-v}}(t,t_2)]dt_1dt_2 \quad (8, 2, 20)$$

で与えられる。こゝで  $[\varphi_{e_{a,n-u}e_{b,n-v}}(t,t_2)]$  は  $a$  回路状態にある第  $n-u$  段階の電圧源と  $b$  回路状態にある第  $n-v$  段階の電圧源から作られる相関関数の行列(時間関数)である。

(8, 2, 19) 式が求められると、これを (8, 2, 18) 式に用いることにより、 $[\psi_{(a,n-u;b,n-v)}(t,t')]$  がえられる。従ってこれを (8, 2, 16) 式、(8, 2, 17) 式に代入すれば所要の  $[\varphi_{(l,n;1,n)}(t,t')]$  が (8, 2, 15) 式により与えられることになる。

第二回路状態に対しても同様に解析され、(8, 2, 15) 式に対応して次式がえられる。

$$[\varphi_{(2,n;2,n)}(t,t')]=[\varphi_{2,1(n,n)}(t,t')]+[\varphi_{2,2(n,n)}(t,t')] \\ +[\varphi_{2,2(n,n)}(t',t)]^T \quad (8, 2, 15')$$

ただし、

$$[\varphi_{2,1(n,n)}(t,t')]=[\psi_{(2,n;2,n)}(t,t')]+[\chi_2(t)]\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2}\{[B_2]^k \\ \times [\psi_{(1,n-k;1,n-l)}(t,t_1)][B_2]^{T^l}\}[\chi_2(t')]^T+[\chi_2(t)]\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2}\{[B_2]^k[\chi_1(t_1)] \\ \times [\psi_{(2,n-1-k;2,n-1-l)}(t_2,t_2)][\chi_1(t_1)]^T[B_2]^{T^l}\}[\chi_2(t')]^T \quad (8, 2, 16')$$

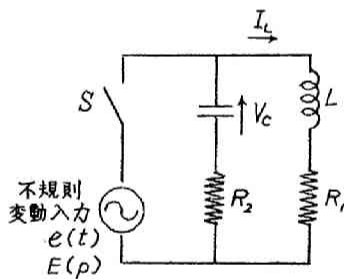
$$[\varphi_{2,2(n,n)}(t,t')]=[\chi_2(t)]\sum_{k=0}^{n-1}[B_2]^k[\psi_{(1,n-k;2,n)}(t,t')] \\ +[\chi_2(t)]\sum_{k=0}^{n-2}[B_2]^k[\chi_1(t)][\psi_{(2,n-1-k;2,n)}(t_2,t')] \\ +[\chi_2(t)]\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2}[B_2]^k[\psi_{(1,n-k;2,n-l)}(t,t_2)][\chi_1(t)]^T[B_2]^{T^l}[\chi_2(t')]^T \quad (8, 2, 17')$$

以上は同一段階、同一回路状態にある電流電圧間の相関関係に対する解析結果であるが、異なる段階、異なる回路状態に属する電流電圧間の相関関係も同様にして求められる。(8, 2, 16)式(8, 2, 17)式(8, 2, 16)'式(8, 2, 17)'式に含まれる $[B_1]^k$ ,  $[B_2]^k$ の様な行列の積はシルベスターの定理を用いて解析することができる。

以上の解析法は断続接点が二個以上ある場合、及び不規則変動入力为非定常な場合にも適用可能である。

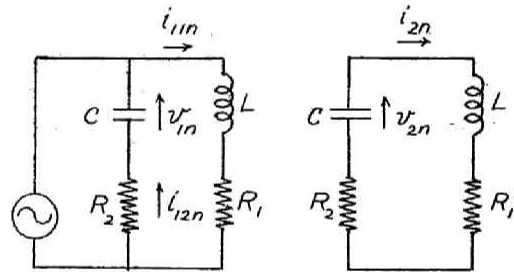
### 3 例題の解析

簡単な解析例として第8, 3, 1図に示す回路に白い雑音がかわった場合に、インダクタンス $L$ 中の電流 $I_L$ 及びコンデンサ $C$ の端子電圧 $V_C$ について解析する。



$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = 10\Omega \\ L &= 10^{-1}H \\ C &= 10^{-4}F \end{aligned}$$

第8, 3, 1図



(a) 第一回路状態

(b) 第二回路状態

第8, 3, 2図

スイッチ $S$ の閉じている状態を第一回路状態、 $S$ の開いている状態を第二回路状態とし、第 $n$ 段階における電流電圧値を第8, 3, 2図(a), (b)の様に表わす。

第一回路状態に対して次の諸関係が成立する。

$$\begin{bmatrix} [Z_1(p)], [\lambda_1] \\ [\mu_1], [Y_1(p)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lp + R_1, & 0, & 0 \\ 0, & R_2, & -1 \\ 0, & 1, & Cp \end{bmatrix} \quad (8, 3, 1)$$

$$\begin{bmatrix} [i_{1n}(t)] \\ [v_{1n}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11n}(t) \\ i_{12n}(t) \\ v_{1n}(t) \end{bmatrix} \quad (8, 3, 2)$$

$$\begin{bmatrix} [E_{1n}(p)] \\ [S_{1n}(p)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(p) \\ -E(p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8, 3, 3)$$

$$\begin{bmatrix} [L_1^{-0}], [0] \\ [0], [C_1^{-0}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L, 0 \\ 0, 0 \\ 0, C \end{bmatrix} \quad (8, 3, 4)$$

$$[F_1(p)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Lp+R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{cp}{R_2cp+1} & \frac{1}{R_2cp+1} \\ 0 & \frac{-1}{R_2cp+1} & \frac{R_2}{R_2cp+1} \end{bmatrix} \quad (8, 3, 5)$$

第二回路状態に対しては次の諸関係が成立する。

$$\begin{bmatrix} [Z_2(p)], [\lambda_2] \\ [\mu_2], [\gamma_2(p)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lp+R_1+R_2, -1 \\ 1, cp \end{bmatrix} \quad (8, 3, 6)$$

$$\begin{bmatrix} [i_{2n}(t)] \\ [v_{2n}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{2n}(t) \\ v_{2n}(t) \end{bmatrix} \quad (8, 3, 7)$$

$$\begin{bmatrix} [E_{2n}(p)] \\ [S_{2n}(p)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8, 3, 8)$$

$$\begin{bmatrix} [L_2^{-0}], [0] \\ [0], [C_2^{-0}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L, 0, 0 \\ 0, 0, C \end{bmatrix} \quad (8, 3, 9)$$

$$[F_2(p)] = \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} cp, 1 \\ -1, Lp+R_1+R_2 \end{bmatrix} \quad (8, 3, 10)$$

$$\Delta_2 = Lcp^2 + c(R_1+R_2)p + 1 \quad (8, 3, 11)$$

が成立する。

不規則変動入力はいく雑音と考えると、その相関関数  $\varphi(\tau)$  は

$$\varphi(\tau) = \delta(\tau) \quad (8, 3, 12)$$

であり (8, 2, 18) 式は (8, 2, 20) 式 (8, 3, 12) 式及び (8, 3, 5) 式 (8, 3, 10) 式を用いて、

$$\begin{aligned} [\psi_{(1, n-u; 1, n-u)}(t, t')] &= \begin{bmatrix} a_{11}(t, t'), & a_{12}(t, t'), & a_{13}(t, t') \\ a_{21}(t, t'), & a_{22}(t, t'), & a_{23}(t, t') \\ a_{31}(t, t'), & a_{32}(t, t'), & a_{33}(t, t') \end{bmatrix} \\ &\equiv [a(t, t')] \quad (8, 3, 13) \end{aligned}$$

がえられる。

$$a_{11}(t, t') = \frac{1}{2R_1 L} \left\{ e^{-\frac{R_1}{L}|t-t'|} - e^{-\frac{R_1}{L}(t+t')} \right\} H(t)H(t') \quad (8, 3, 14)$$

$$a_{22}(t, t') = \frac{1}{R_2^2} \left\{ \delta(t-t') - \frac{1}{2R_2 C} \left( e^{-\frac{1}{R_2 C}|t-t'|} + e^{-\frac{1}{R_2 C}(t-t')} \right) \right\} H(t)H(t') \quad (8, 3, 15)$$

$$a_{33}(t, t') = \frac{1}{2R_2 C} \left\{ e^{-\frac{1}{R_2 C}|t-t'|} - e^{-\frac{1}{R_2 C}(t+t')} \right\} H(t)H(t') \quad (8, 3, 16)$$

$$\begin{aligned} a_{23}(t, t') = a_{32}(t', t) &= \frac{1}{2R_2^2 C} \left\{ e^{-\frac{1}{R_2 C}(t-t')} H(t-t') \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{1}{R_2 C}(t'-t)} H(t'-t) - e^{-\frac{1}{R_2 C}(t+t')} H(t)H(t') \right\} \quad (8, 3, 17) \end{aligned}$$

$$a_{13}(t, t') = a_{31}(t', t) = \frac{1}{(R_1 R_2 C + L)} \left\{ e^{-\frac{R_1}{L}|t-t'|} - e^{-\left(\frac{R_1}{L}t + \frac{1}{R_2 C}t'\right)} \right\} H(t)H(t') \quad (8, 3, 18)$$

$$\begin{aligned} a_{12}(t, t') = a_{21}(t', t) &= \frac{1}{R_1 R_2 C + L} \left\{ \frac{1}{R_2} e^{-\frac{1}{R_2 C}(t-t')} H(t-t') \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_1 C}{L} e^{-\frac{R_1}{L}(t'-t)} H(t'-t) - \frac{1}{R_2} e^{-\left(\frac{1}{R_2 C}t + \frac{R_1}{L}t'\right)} \right\} H(t)H(t') \quad (8, 3, 19) \end{aligned}$$

シルベスターの定理により、

$$[B_1]^k = \beta_1^k [\xi_{11}] + \beta_2^k [\xi_{21}] \quad (\delta, 3, 20)$$

$$[B_2]^k = \beta_1^k [\xi_{12}] + \beta_2^k [\xi_{22}] \quad (\delta, 3, 21)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} [\xi_{1r}] &= \frac{\beta_2[U] - [B_r]}{\beta_2 - \beta_1} \\ [\xi_{2r}] &= \frac{\beta_1[U] - [B_r]}{\beta_1 - \beta_2} \end{aligned} \right\} \quad (r=1, 2) \quad (\delta, 3, 22)$$

であり、 $\beta_\ell$  ( $\ell=1, 2$ ) は

$$\delta \{ \beta_\ell [U] - [B_\ell] \} = 0 \quad (\delta, 3, 23)$$

を満足する。<sup>(3)</sup>  $(\delta, 3, 20)$  式  $(\delta, 3, 21)$  式を用いると第一回路状態に対して  $(\delta, 2, 15)$  式から

$$\begin{aligned} [\varphi_{(1,n;1,n)}(t,t')] &= [a(t,t')] + [\chi_1(t)] \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\nu'=1}^2 \frac{1 - (\beta_\nu \beta_{\nu'})^{n-1}}{1 - \beta_\nu \beta_{\nu'}} [\xi_{\nu 2}] [\chi_2(t_2)] \\ &\quad \times [a(t_1, t)] [\chi_2(t_2)]^T [\xi_{\nu' 2}]^T [\chi_1(t')]^T \end{aligned} \quad (\delta, 3, 24)$$

となる。

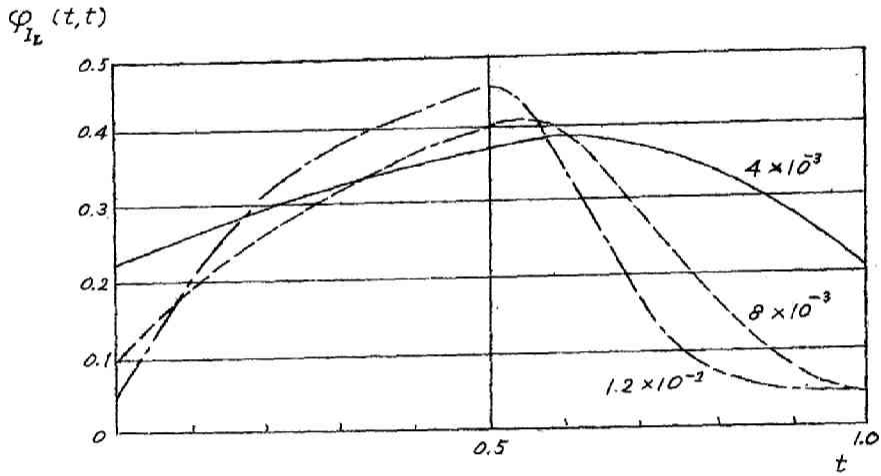
また同様に第二回路状態に対しては  $(\delta, 2, 15)$  式を用いて

$$[\varphi_{(2,n;2,n)}(t,t')] = [\chi_2(t)] \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\nu'=1}^2 \frac{1 - (\beta_\nu \beta_{\nu'})^n}{1 - \beta_\nu \beta_{\nu'}} [\xi_{\nu 1}] [a(t_1, t)] [\xi_{\nu' 1}]^T [\chi_2(t')]^T \quad (\delta, 3, 25)$$

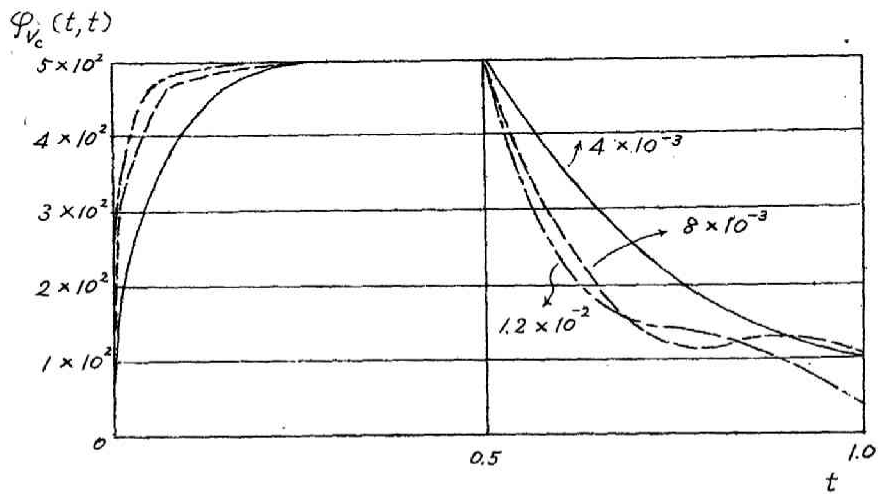
がえられる。

第  $\delta, 3, 1$  図に示した回路常数に対して  $(\delta, 3, 24)$  式  $(\delta, 3, 25)$  式の数値計算した結果を第  $\delta, 3, 3$  図 (a), (b) に示す。ただし  $n \rightarrow \infty$  即ち不規則変動入力に加わってから充分時間が経過した場合の電流、電圧の分散値 ( $t = t'$ ) にのみ注目した。図中の数字は各回路状態の継続時間を示す (ただし  $t_1 = t_2$  とする)。





第 8, 3, 3 図 (a)  $I_L$  の分散の時間的变化



第 8, 3, 3 図 (b)  $V_C$  の分散の時間的变化

#### 4 結 言

以上 周期的断続回路の不規則変動入力に対する応答について解析を行なった。この方法では断続接点が二つ以上ある場合や、不規則変動入力が非定常の場合にも適用することが出来る。

周期的断続回路の解析法としては *cut off operator* を用いる方法もあるが、<sup>(18)</sup>この方法も不規則変動入力に対する解析に有効である。この場合の手順としては、第一又は第二回路状態の始まりより任意の時間だけ後にインパルスが加わった場合の周期的断続回路のインパルス応答を計算する。次に、不規則変動入力をインパルスの合成と考えて、入力が所要の統計的性質をもつ様にインパルス応答を合成すればよいわけである。

## 第九章 本研究の成果

本研究においてえられた成果は各3の章において結論として記述したが、その要点を本章においてまとめると次の如くである。

### (1) 第2章

サンプル値制御系の統計的設計に用いる最適基準として制御系偏差の分散に制御系入力の変動状態に依存する重みを考慮した設計理論を展開した。この理論は、サンプル点における制御系応答にのみ注目する場合には、一般に制御系偏差の分散を最小にする従来の統計的設計理論と、有限整定時間応答をせしめる様に設計する理論とを両極端として有する様な設計理論であることを示した。また、この場合に用いられる重みにつき、その決定の目安となる統計的諸量につき考察し、更にサンプル点以外の時点における制御系応答をも考慮した設計法をも考察した。

### (2) 第3章

非線型制御系の解析には非線型要素を等価利得をもつ増巾器にて置換し、線型化して取り扱うのが普通であるが、ここでは制御系入力に一定の絶対値をもち、一定の統計的分布に従う時間間隔で極性が反転する場合につき、リレー特性と簡単な制御対象を有する場合に対して厳密な取り扱いを行ない、偏差の統計的分布を求めた。

### (3) 第4章

サンプル値制御系を、各サンプル周期内の一定時点で操作量を反転させる方式の制御につき統計的考察を行なった。この方式では制御要素は著しく単純化される。高次の制御対象に対しては規則的入力に対する場合の設計理論が統計的設計の場合にも目安を与えるものと考えられるので附録Ⅱに説明する。

### (4) 第5章

操作量が矩形パルスで、その絶対値が一定で、その極性が一定周

期毎の制御系偏差と同一、またパルス巾はその偏差の絶対値と共に増加する様な制御系について統計的考察を行なった。この様なパルス巾変調要素は非線型特性を有するため、これを等価線型要素に置換して取り扱った。また、階段状入力に対する設計法を附録Ⅲに考察する。

(5) 第6章

制御系偏差の検出部の階段状特性が制御系特性におよぼす影響を不規則変動入力に対して統計的に考察したもので、階段の許容最大値の決定に役立つものと考えられる。

(6) 第7章

履歴現象を有する非線型要素に対する統計的考察は困難であるが、本章ではバックラッシュの場合に対して、これを簡単な履歴現象を有しないモデルに置換できるものとして取り扱った。

(7) 第8章

周期的断続回路の解析は規則的入力に対しては広く行なわれているが、これを不規則変動入力に対して拡張した。この方法は $z$ 変換法では解かれない様な一般の周期的断続回路にも適用可能であり、また不規則変動入力に定常でない場合にも適用できるものである。

## 謝 辞

本研究は 林 重 憲 教授 御指導のもとに行なったものであり、終始懇切な御指示と御鞭撻を戴いた同教授に対し深甚なる謝意を表わす次第です。その他、電気電子面教室の教官各位、卒業研究として本研究に協力して頂いた方々にも負うところが大きい。こゝに共に記して感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

1. N. Wiener ; *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley & Sons, New York, 1948.
2. G. C. Newton ; L. A. Gould., and J. F. Kaiser.; *Analytical Design of Linear Feedback Controls*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
3. 林 重憲 ; 演算子法と過渡現象, 国民科学社, 昭 24.
4. R. C. Booton ; "Nonlinear Control Systems with Random Inputs", *I.R.E. Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-1 (1954), pp. 9.
5. 林, 星野 ; 最適制御系の統計的設計について 昭 33 年 10 月 電気関係学会関西支部連大予稿 p 57.
6. S. S. L. Chang ; "Statistical Design Theory for Strictly Digital Sampled-Data Systems", *Transactions of the A.I.E.E.*, Vol. 76, Part III, 1958, pp. 702-709.
7. J. G. Truxal ; *Automatic Feedback Control System Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1955.
8. James, Nichols and Phillips. ; *Theory of Servomechanism*. McGraw-Hill, New York, 1947 p. 310.
9. A. R. Bergen and J. R. Ragazzini ; "Sampled-Data Processing Techniques for Feedback Control Systems", *Transactions of the A.I.E.E.*, Vol. 73, Part II, 1954, pp. 236-247.
10. S. S. L. Chang ; "Statistical Design Theory for Digital-Controlled Continuous Systems", *Transactions of the A.I.E.E.*, Vol. 77, Part II, 1958, pp. 191-201.

11. 林, 星野 ; 最適制御系の統計的設計 (第2報) 昭34年4月  
電気四学会連大予稿 p. 145.
12. E. I. Jury and W. Schröder ; "Discrete Compensation of  
Sampled-Data and Continuous Control Systems",  
Transactions of the A.I.E.E., Vol. 75, Part II, 1956,  
pp. 317-325.
13. 林, 星野 ; 非線型制御系の解析 (ランダム入力) (第2報) 昭34  
年10月 電気関係学会関西支部連大予稿 p. 40.
14. E. I. Jury ; Sampled-Data Control Systems, John Wiley  
& Son, New York, 1958.
15. W. R. Bennett ; "Spectra of Quantized Signals", Bell  
System Technical Journal, Vol. 27, July, 1948, pp.  
446-472.
16. 林, 星野 ; 非線型制御系の解析 (ランダム入力) (第1報) 昭33  
年5月 電気四学会連大予稿
17. 林, 星野 ; 断続回路の統計的解析 昭32年10月 電気関係学  
会関西支部連大予稿 p. 5.
18. 林, 近藤, 松本 ; 断続回路の一解法とそれによるダイヤルインパ  
ルスの解析
19. S. O. Rice ; "Mathematical Analysis of Random Noise",  
Bell System Technical Journal, Vol. 23, 1944, pp.  
282-332. and Vol. 24, 1945, pp. 46-156.
20. 林, 星野 ; カウンティングの統計的解析, 昭31年10月 電気関  
係学会関西支部連大予稿 p. 3.
21. 林, 星野 ; 電カスペクトル密度関数の算定例, 昭32年4月 電  
気四学会連大予稿 p. 31.
22. 榎木, 布川, 木本 ; 有限整定時間応答を考慮したサンプル値制御  
の統計的シンセシス, 第1回自動制御連合講演会前刷, 昭33  
年11月, p. 45-46.
23. 石井 ; サンプル値制御系の統計的調整, 同上 p. 77-78.

## 附 録 I

## (2.4.4) 式 の 証 明

$\bar{f}$  は (2.2, 19) 式により

$$\bar{f} = \int_{(n\text{個})} \cdots \int f(r_1, r_2, \cdots, r_n) p(r_1, r_2, \cdots, r_n) dr_1 dr_2 \cdots dr_n \quad (2.2, 19)$$

で与えられるが、 $f(r_1, r_2, \cdots, r_n)$  として (2.4, 1) 式

$$f(r_1, r_2, \cdots, r_n) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n a_{ij} r_i r_j\right] \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (2.4, 1)$$

を、また  $p(r_1, r_2, \cdots, r_n)$  として (2.4, 2) 式

$$p(r_1, r_2, \cdots, r_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |M|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n \frac{M_{ij}}{|M|} r_i r_j\right] \quad (2.4, 2)$$

を用いると

$$\bar{f} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |M|^{-\frac{1}{2}} \int_{(n\text{個})} \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n b_{ij} r_i r_j\right] dr_1 dr_2 \cdots dr_n \quad (I. 1)$$

ただし

$$b_{ij} \equiv a_{ij} + \frac{M_{ij}}{|M|} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \quad (I. 2)$$

こゝで行列  $[B]$  を

$$[B] \equiv \begin{bmatrix} b_{11}, & \cdots, & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}, & \cdots, & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (I. 3)$$

と定義すれば、明らかに

$$I = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |B|^{\frac{1}{2}} \int_{(n\text{個})} \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n b_{ij} r_i r_j\right] dr_1 dr_2 \cdots dr_n \quad (I. 4)$$

るから、これを (I. 1) 式に用いて、

$$\bar{f} = |M|^{-\frac{1}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} \quad (I. 5)$$

られる。また  $\bar{f}_{ij}$  に対しては (2, 2, 20) 式 即ち

$$\bar{f}_{ij} = \int_{(n\text{個})} \cdots \int \frac{\partial^2 f(r_1, r_2, \dots, r_n)}{\partial r_i \partial r_j} p(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 dr_2 \cdots dr_n \quad (I. 6)$$

2, 4, 1) 式からえられる関係

$$\frac{r_1, r_2, \dots, r_n}{\partial r_i \partial r_j} = (-a_{ij} + \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{lj} r_k r_l) \exp. \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n a_{ij} r_i r_j \right] \quad (I. 7)$$

いと

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij} = & (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |M|^{-\frac{1}{2}} \left[ -a_{ij} \int_{(n\text{個})} \cdots \int \exp. \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n b_{ij} r_i r_j \right] dr_1 dr_2 \cdots dr_n \right. \\ & \left. + \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{lj} \int_{(n\text{個})} \cdots \int r_k r_l \exp. \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n b_{ij} r_i r_j \right] dr_1 dr_2 \cdots dr_n \right] \quad (I. 8) \end{aligned}$$

で

$$\int_{(n\text{個})} \cdots \int r_k r_l \exp. \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n b_{ij} r_i r_j \right] dr_1 dr_2 \cdots dr_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|B|^{\frac{1}{2}}} B_{kl} \quad (I. 9)$$

いる。(19)  $B_{kl}$  は行列  $[B]$  の要素  $b_{kl}$  に関する余因子である。の関係および (I. 4) 式により (I. 8) 式は

$$\bar{f}_{ij} = |M|^{-\frac{1}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} \left( -a_{ij} + \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{lj} \frac{B_{kl}}{|B|} \right) \quad (I. 10)$$

て (I. 5) 式を用いると、

$$\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} = -a_{ij} + \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{lj} \frac{B_{kl}}{|B|} \quad (ij = 1, 2, \dots, n) \quad (I. 11)$$

で  $B_{kl} = B_{lk}$  なることを考慮すると、



$$\sum_{l=1}^n \left( a_{lj} + \frac{M_{lj}}{|M|} \right) \frac{B_{kl}}{|B|} = \delta_{kj} \equiv \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (I.12)$$

これを (I.11) 式に用いて、

$$\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} = - \sum_{k,l=1}^n a_{ik} \frac{M_{lj}}{|M|} \cdot \frac{B_{kl}}{|B|} \quad (I.13)$$

$[B_{kl}/|B|]$  は行列  $[B]$  の逆行列、 $[M_{lj}/|M|]$  は行列  $[M]$  の逆行列であるから

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right] &= -[a] \left[ [M]^{-1} + [a] \right]^{-1} [M]^{-1} \\ &= -[a] \left[ [U] + [M][a] \right]^{-1} \end{aligned} \quad (I.14)$$

簡単のため

$$[c] \equiv [U] + [M][a] \quad (2, 4, 5)$$

とおけば、

$$\left[ \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}} \right] = -[a][c]^{-1} \quad (2, 4, 4)$$

がえられる。

## 付 金 録 II.

# 反転要素を用いるサンプル値制御系の規則的 入力に対する設計

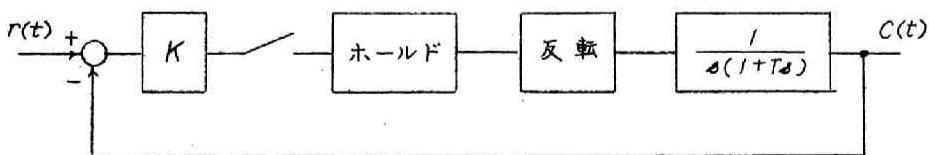
## 1 緒 言

第四章において操作量を各サンプリング周期中の一定時点において反転させる方式について、その統計的設計法を考察し、制御対象の次数が2次の場合について数値計算を行なった。同様の取扱いは、さらに高次の制御対象に対しても原理的には可能であるが、その解析は複雑となるので実際には何らかの計算機を用いる必要があると考えられる。この際、不規則変動入力の性質に従い、階段状又は速度状の入力に対して立てられた設計法によるゲイン定数や反転時点は設計の目安を与えるものと考えられるので、多少の考察を行なう。この方式では階段状入力に対しては増巾器、サンブラ、ホールド及び上記の反転要素のみで有限整定時間応答をうることができる。反転要素は単に操作量の極性を逆にするだけであるから、制御装置は著るしく簡単になる。

## 2 制御対象の次数が2次の場合

### 2.1 階段状入力に対する設計

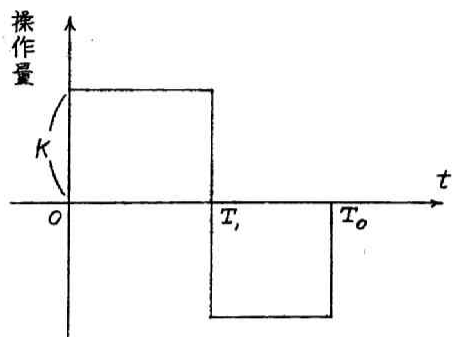
第II, 1図に制御系の構成を示す。制御系入力は階段状とし、操作量は



第II, 1図

第 II, 2 図に示した様に各サンプリング周期  $T_0$  内の時点  $T_1$  において反転せしめられるものとする。

この  $T_1$  は制御系偏差が  $t \geq T_0$  において常に零となる様に決定される。いま制御対象のインデシヤル応答を  $g(t)$  とすれば単位階段状入力に対する制御系出力  $c(t)$  は



第 II, 2 図

$$c(t) = K [g(t) - 2g(t - T_1)H(t - T_1)] \quad (0 \leq t \leq T_0) \quad (\text{II}, 1)$$

であるから  $K$  及び  $T_1$  を

$$c'(T_0) = 0 \quad (\text{II}, 2)$$

$$c(T_0) = 1 \quad (\text{II}, 3)$$

を満足する様に決定すればよい。

$$g(t) = t - T_1(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (\text{II}, 4)$$

であるから、これを (II, 1) 式に用いて条件 (II, 2) 式及び (II, 3) 式を計算すれば、

$$e^{-as} = 0.5(1 + e^{-a}) \quad (\text{II}, 5)$$

及び

$$\frac{1}{KT_0} = 1 - 2S \quad (\text{II}, 6)$$

を得る。ただし、

$$S \equiv 1 - \frac{T_1}{T_0} \quad (\text{II}, 7)$$

$$a \equiv \frac{T_0}{T} \quad (\text{II}, 8)$$

で与えられる。(II, 5)式  
の関係は第II, 3図及び第  
II, 4図に実線で示されて  
いる。この様に反転の時  
点  $T_i$  及びゲイン  $KT_o$  は  
制御対象の時定数とサン  
プリング周期の比のみに  
より決まる。

また  $\alpha=1$  の場合の応  
答を第II, 5図に示す。操  
作量は  $\frac{T_i}{T_o}=0.62$  におい  
て反転せしめられている。  
またこの場合  $KT_o=4.2$   
である。

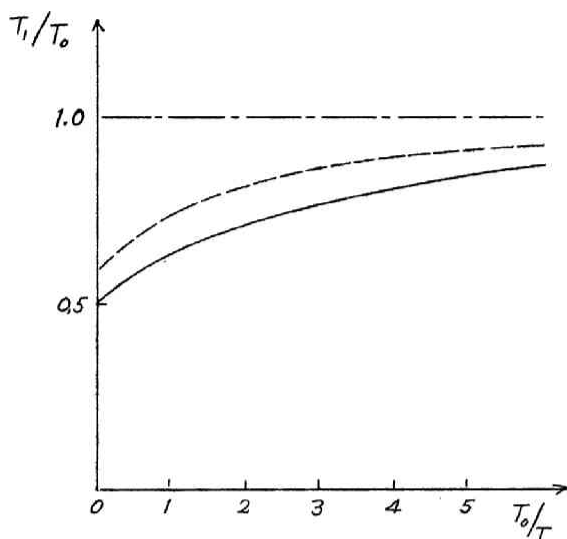
## 2.2 速度状入力に 対する設計

上記の様に階段状入力  
に対しては制御系は簡単  
な構成となるが、速度状  
入力に対しては第II, 6図  
に示す様に多少構成が複  
雑となり図の様に遅延要  
素を含むサンプル値制御

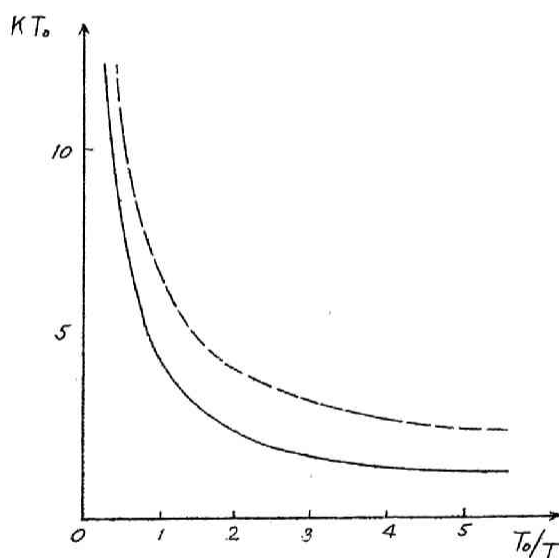
装置を併用する必要がある。この場合の設計は前の場合と同様にして行  
なわれる。即ち、速度状入力の变化率を  $1/T_o$  とすれば設計条件は次の様  
になる。

$$c'(T_o) = 1/T_o \quad (\text{II. 9})$$

$$c(T_o) = 2 \quad (\text{II. 10})$$



第II, 3図



第II, 4図

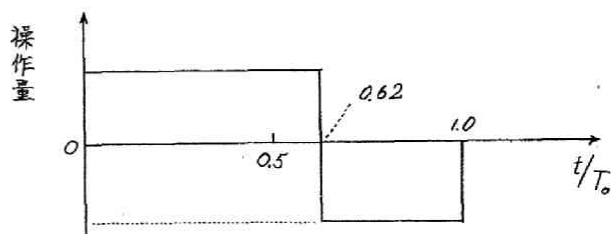
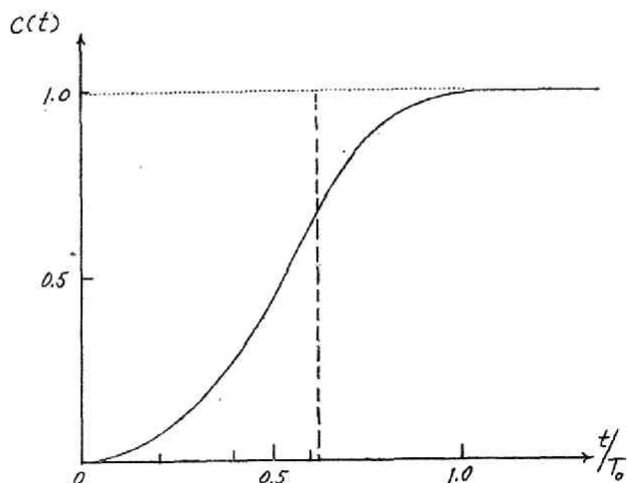
(II.1) 式及び (II.4) 式を用いると上の二式から、

$$e^{-as} = 0.5 \left( 1 + e^{-a} + \frac{1}{KT_0} \right) \quad (\text{II.11})$$

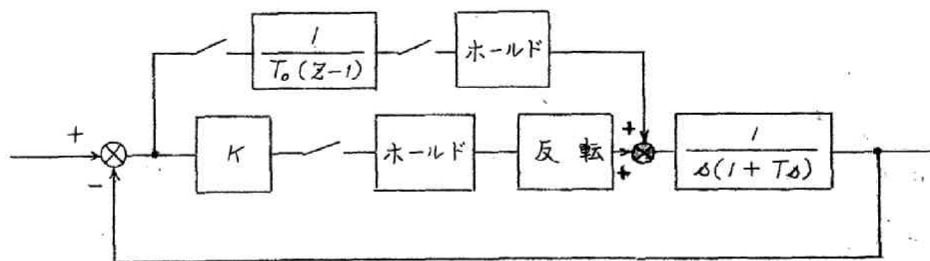
及び

$$\frac{1}{KT_0} = \frac{1-2S}{2 + \frac{1}{a}} \quad (\text{II.12})$$

が得られる。ただし  $a$  及び  $S$  は (II.7) 式及び (II.8) 式で定義されたものである。反転の時点は (II.11) 式と



第 II. 5 図



第 II, 6 図

(II.12) 式から  $KT_0$  を消去して得られる次の関係

$$e^{-as} = 0.5 \left( 1 + a^{-a} + \frac{1-2S}{2 + \frac{1}{a}} \right) \quad (\text{II.13})$$

により決定される。(II.13) 式の関係は第 II.3 図に点線で示される。またこの  $S$  と  $a$  の関係を (II.12) 式に用いて計算したゲイン  $KT_0$  と  $a$  との関係は第 II.4 図に点線で示した。また  $a=1$  の場合の応答を第 II.7 図に示す。

同図の点線は操作量を反転した時点を示すもので  $\frac{T_1}{T_0} = 0.73$  である。

### 3 制御対象の次数が3次の場合

#### 3.1 階段状入力に対する設計

前節で行なった解析は制御対象が高次の場合にも適用出来るものであるが、本節では次数が3次の場合に対して考察する。

この場合には操作量は第Ⅱ.8図の様に各サンプリング周期内において二度反転せしめる必要がある。制御対象を

$$G(s) = \frac{1}{s(1+T_0s)(1+T_0's)} \quad (\text{Ⅱ.14})$$

そのインデシャル応答を  $g(t)$  とすれば単位階段状入力に対する制御系出力は

$$c(t) = K[g(t) - 2g(t-T_1)H(t-T_1) + 2g(t-T_2)H(t-T_2)]$$

$$(0 \leq t \leq T_0)$$

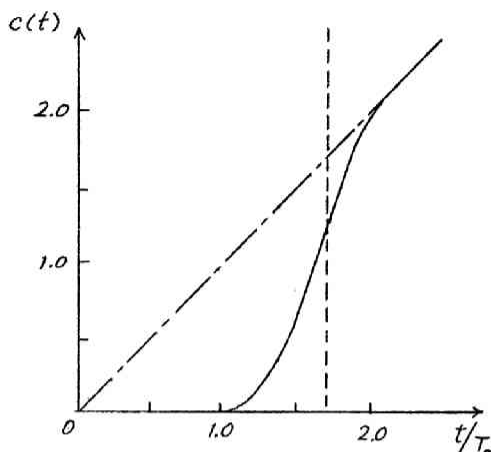
(Ⅱ.15)

と表わされる。 $t \geq T_0$  で偏差が常に零となる様に設計することにすれば設計条件として、

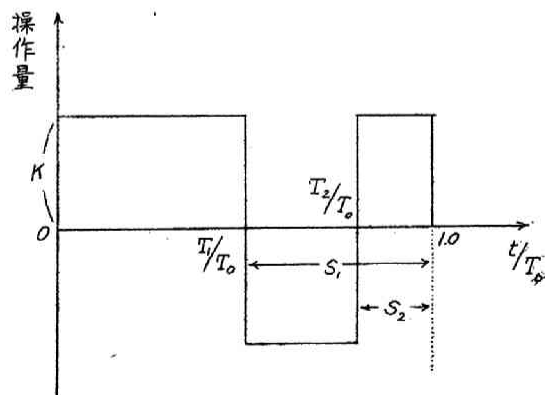
$$C'(T_0) = 0 \quad (\text{Ⅱ.16})$$

$$C''(T_0) = 0 \quad (\text{Ⅱ.17})$$

$$C(T_0) = 1 \quad (\text{Ⅱ.18})$$



第Ⅱ.7図



第Ⅱ.8図

が得られる。こゝで  $a, b, S_1, S_2$  を

$$a \equiv \frac{T_0}{T} \quad (\text{II.19})$$

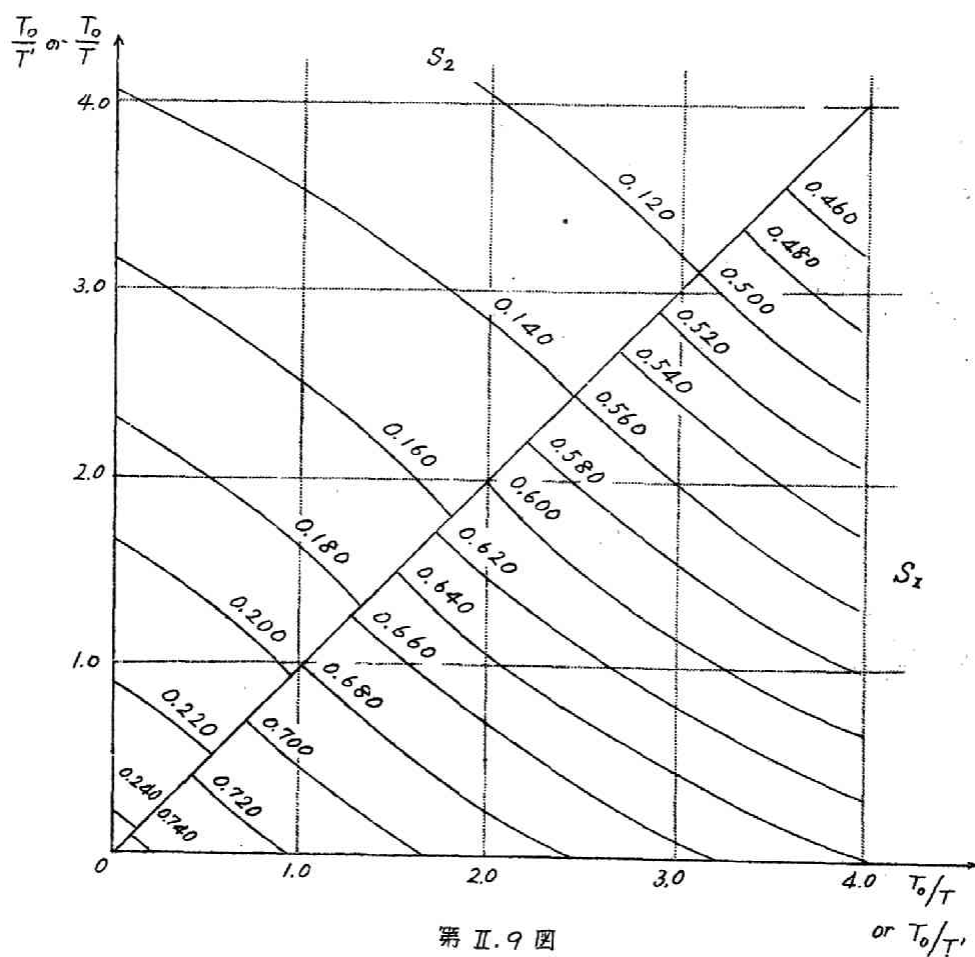
$$b \equiv \frac{T_0}{T'} \quad (\text{II.20})$$

$$S_1 \equiv 1 - \frac{T_1}{T_0} \quad (\text{II.21})$$

$$S_2 \equiv 1 - \frac{T_2}{T_0} \quad (\text{II.22})$$

より定義する。(II.15)式を(II.16)式及び(II.17)式に用いて、

$$e^{-aS_2} - e^{-aS_1} = 0.5(1 - e^{-a}) \quad (\text{II.23})$$



第 II.9 図

及び、

$$e^{-bS_2} - e^{-bS_1} = 0.5(1 - e^{-b}) \quad (\text{II.24})$$

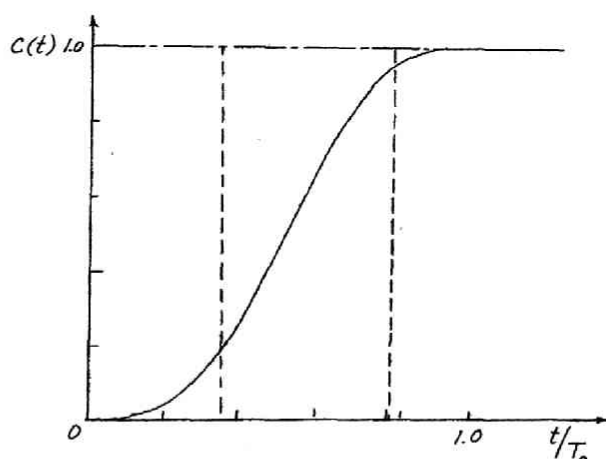
を得る。 $a$  及び  $b$  が与えられると上の二式から  $S_1$  及び  $S_2$  が求められ操作量を反転する時点  $T_1$  及び  $T_2$  は (II.21) 式及び (II.22) 式より求められる。第 II.9 図は (II.23) 式及び (II.24) 式を図式的に解いた結果を示すもので横軸は  $T_0/T$  (又は  $T_0/T'$ )、縦軸は  $T_0/T$  (又は  $T_0/T'$ ) である。また原点を通り両軸と  $45^\circ$  をなす直線の右側は  $S_1$  を、左側は  $S_2$  を与える図表である。ゲイン  $KT_0$  は (II.18) 式から得られる次の関係

$$\frac{1}{KT_0} = 1 - 2(S_1 - S_2) \quad (\text{II.25})$$

により決定される。 $a = 2.0$ ,  $b = 1.0$  の場合に対する応答を第 II.10 図に示す。図中点線で

操作量の反転の時点を示した。この場合  $S_1 = 0.643$ ,  $S_2 = 0.172$ ,  $KT_0 = 17.07$  である。

速度状入力に対しても同様に設計することが出来る。



第 II.10 図

## 2.2 通常のサン

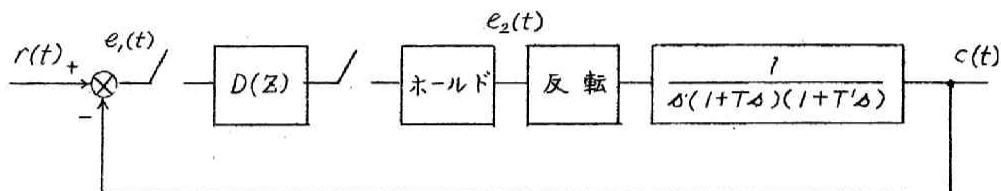
### プル値制御

### 装置との併用

これまでは 1 サンプル周期で整定する様に設計する方法を説明した。しかし高次の制御対象の場合に 1 サンプル周期で整定させるには大きい操作量を必要とし実現が困難な場合も考えられる。このため、ここでは通常のサンプル値制御装置を併用する場合の解析を行なった。



制御対象の次数が3次の場合には整定時間は通常の設計法では3サンプリング周期必要とするが、各サンプリング周期中の一時点で操作量を反転することにより、2サンプリング周期で整定するように設計してみる。



第 II. 11 図

制御系の構成を第 II. 11 図に示す。制御系入力は単位階段状とする。第 II. 12 図は制御系各部の諸量の時間的变化を示したもので、これから所要の  $D(z)$  は

$$D(z) = K \frac{1 + h^{**} z^{-1}}{1 + (1 - h^*) z^{-1}} \quad (\text{II. 26})$$

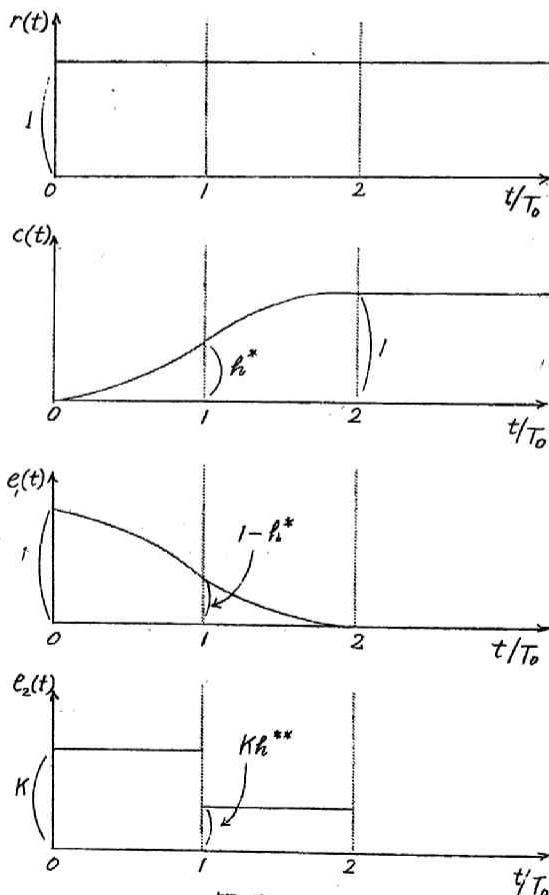
で与えられることがわかる。いま制御対象のインデシャル応答を  $g(t)$  とし、

$$\begin{aligned} \phi(t) = & g(t) - 2g(t - T_1)H(t - T_1) \\ & + g(t - T_0)H(t - T_0) \end{aligned} \quad (\text{II. 27})$$

とおけば制御系出力  $c(t)$  は

$$\begin{aligned} c(t) = & K\phi(t) \\ & + Kh^{**}\phi(t - T_0)H(t - T_0) \end{aligned} \quad (\text{II. 28})$$

と表わされる。操作量の反転の時点  $T_1$  とゲイン  $KT_0$ 。



第 II. 12 図

は、

$$C'(2T_0) = 0 \quad (\text{II. 29})$$

$$C(2T_0) = 1 \quad (\text{II. 30})$$

より定まる。(II. 27)式及び(II. 28)式を用いると(II. 29)式は、

$$\phi'(2T_0)\phi''(T_0) = \phi''(2T_0)\phi'(T_0) \quad (\text{II. 31})$$

となり、また(II. 30)式は

$$\frac{1}{KT_0} = \phi(2T_0) - \frac{\phi(T_0)\phi'(2T_0)}{\phi'(T_0)} \quad (\text{II. 32})$$

また(II. 26)式は、

$$D(Z) = K \cdot \frac{1 - \phi'(2T_0)Z^{-1}/\phi'(T_0)}{1 + (1 - \phi(T_0))Z^{-1}} \quad (\text{II. 33})$$

となることがわかる。

第II. 13 図は  $a=2.0$   
 $b=1.0$  の場合に対する  
 応答を示すものであるが、  
 実線と点線で示した様に  
 二つの解を有している。  
 たゞし実線と点線の二つ  
 の縦線は各々の場合の操  
 作量の反転の時点を示す。  
 実線で示した場合は、

$$T_1 = 0.72$$

$$KT_0 = 3.65$$

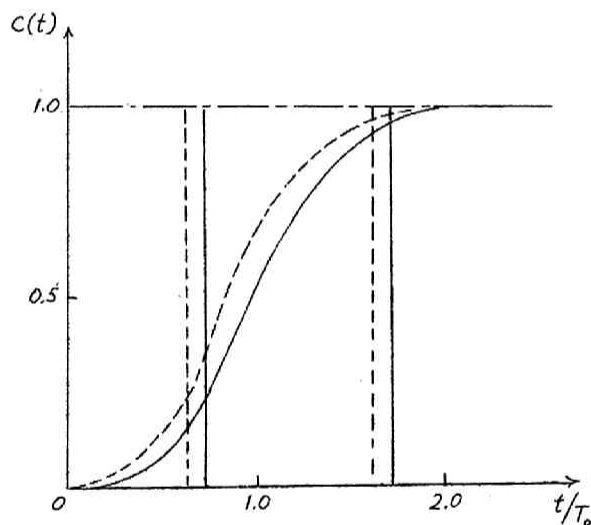
$$D(Z) = \frac{3.65}{T_0} \frac{1 - 0.368Z^{-1}}{1 + 0.432Z^{-1}} \quad (\text{II. 34})$$

また点線で示した場合は

$$T_1 = 0.62$$

$$KT_0 = 4.80$$

$$D(Z) = \frac{4.80}{T_0} \frac{1 - 0.138Z^{-1}}{1 + 0.325Z^{-1}} \quad (\text{II. 35})$$



第II. 13 図

である。しかし点線で示される解の場合の操作量の最大値が実線で示される解の場合より大きいので不利益である。

この例題で示される様に操作量を反転させる制御方式は通常のサンプル値制御装置と併用することにより整定までのサンプリング周期数を任意に選ぶことができるものと考えられる。またこの様な併用によりサンプル値制御装置の構成は簡単になる。

#### 4 制御対象の次数が高次の場合

制御対象が一般に

$$G(s) = \frac{1}{s(1+\tau_1 s) \cdots (1+\tau_{n-1} s)} \equiv \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i T_0}{1+\tau_i s} \quad (\text{II.36})$$

と表わされる場合について考察する。設計方針としては  $t=T_0$  において偏差及びその 1 次乃至  $(n-1)$  次微係数がすべて零になる様にする。ここで、

$$a_i \equiv \frac{T_0}{\tau_i} \quad (\text{II.37})$$

とおけば上の条件から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{KT_0} = & \left[ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (1 - e^{-a_i}) \right] - 2 \left[ S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (1 - e^{-a_i S_1}) \right] \\ & + \cdots + 2(-1)^{n-1} \left[ S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (1 - e^{-a_i S_{n-1}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

及び

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^{n-1} A_i a_i^k e^{-a_i} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} A_i a_i^k e^{-a_i S_1} \\ & + \cdots + 2(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_i a_i^k e^{-a_i S_{n-1}} \end{aligned} \quad (k=1, \cdots, n-1) \quad (\text{II.39})$$

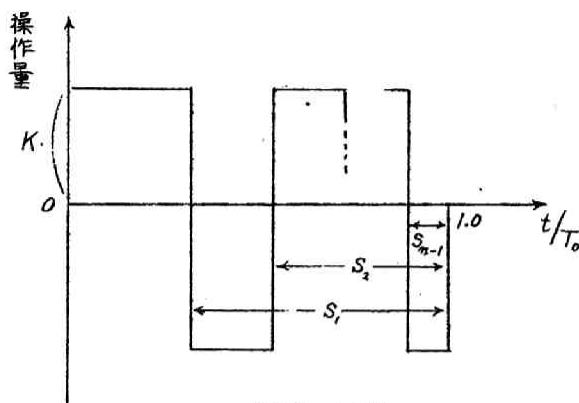
をうる。ただし  $S_1, \cdots, S_{n-1}$  は操作量の切換時点を示す (第 II. 14 図)。

図)。

(II.39)式は計算により、

$$\begin{aligned} & e^{-a_k S_{n-1}} - e^{-a_k S_{n-2}} + \dots \\ & + (-1)^{n-2} e^{-a_k S_1} \\ & = 0.5 \{ 1 + (-1)^n e^{-a_k} \} \\ & \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

(II.40)



第 II. 14 図

となることがわかる。

$a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) を与えれば上式から  $S_1, \dots, S_{n-1}$  が決定できる。

またゲイン  $KT_0$  は (II.40) 式を (II.38) 式に用いて、

$$\frac{1}{KT_0} = 1 - 2S_1 + 2S_2 - \dots + 2(-1)^{n-1} S_{n-1} \quad (\text{II.41})$$

がえられる。

速度状入力の場合に対して同様の解析をすると、(II.40) 式に対応して、

$$\begin{aligned} & e^{-a_k S_{n-1}} - e^{-a_k S_{n-2}} + \dots + (-1)^{n-2} e^{-a_k S_1} \\ & = 0.5 \left\{ 1 + (-1)^n e^{-a_k} + (-1)^n \frac{1}{KT_0} \right\} \\ & \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

(II.41) 式に対応して、

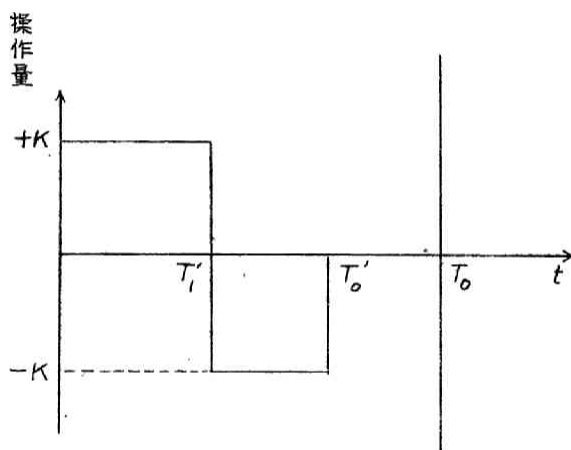
$$\frac{1}{KT_0} = \frac{1 - 2S_1 + 2S_2 - \dots + 2(-1)^{n-1} S_{n-1}}{2 + \sum_{i=1}^{n-1} 1/a_i} \quad (\text{II.43})$$

がえられる。(II.42) 式及び (II.43) 式から  $KT_0$  を消去すれば  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) と  $S_j$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) との関係式がえられる。

## 5 その他の諸考察

### 5.1 1 サンプル周期以内での整定

サンプリング周期が何らかの条件により自由に選定できない場合に、1 サンプリング周期より短い時間  $T_0'$  で整定させたい場合には整定時間  $T_0'$  をサンプリング周期と考えて上記の方法で設計し、 $T_0' < t < T_0$  では操作量を零にすればよい(第 II. 15 図参照)。



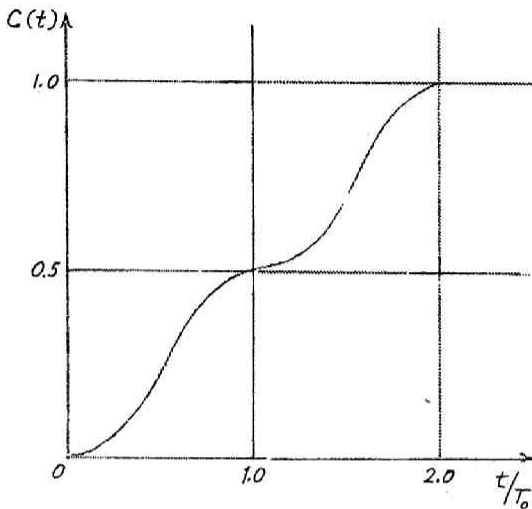
第 II. 15 図

### 5.2 制御対象が飽和を有する場合

制御対象が飽和を有する場合に、階段状入力に対して 1 サンプリング周期で整定させる設計法では制御系は飽和によって制限されるだけずつ応答し、線型部分に入れば 1 サンプリング周期で整定する。第 II. 16 図は  $G(s) = 1/s(s+1)$ 、サンプリング周期 1 秒の場合に、飽和によって 2 サンプリング周期で整定する場合を示したものである。

## 6 反転要素の模擬

上記の制御系をアナログ型計算機で解析するためには、操作量の極性を各サンプリング周期中の一定時点において反転せしめるような要素(反

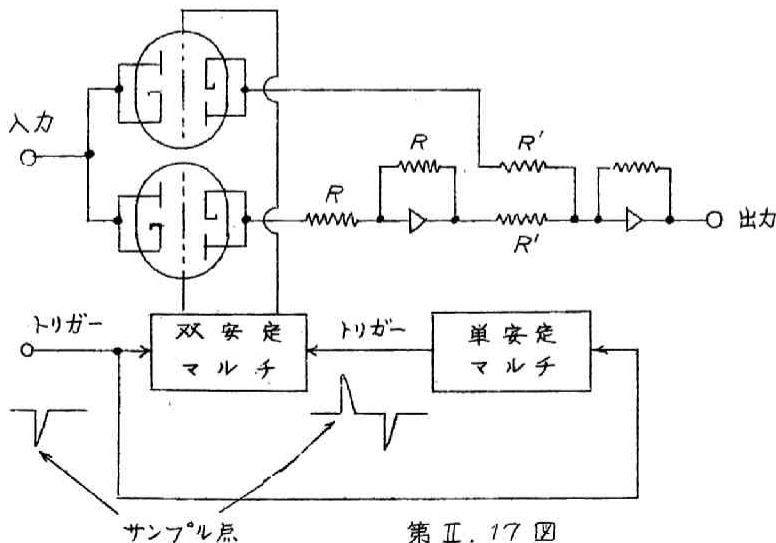


第Ⅱ. 16 図

転要素)を模擬しなくてはならない。このために試作した回路の構成を第Ⅱ. 17 図にします。簡単のために制御対象の次数は 2 次と仮定した。

この場合には、2.1.において論じたように、各サンプリング周期中の一時点において、操作量の極性を反転すればよい。この動作を行なわせるために、サンプル点において加えられるトリガーにより極性

を反転し、一定時間後に極性を復元する単安定マルチを用いて双安定マルチを各サンプリング周期中の一定時点で反転させ、その出力電圧で三極管スイッチを開閉せしめることにより、操作量の極性の反転を行った。この回路をサンプラ、ホールド回路およびアナログ型計算機と併用して、実際に有限整定応答がえられることが認められた。



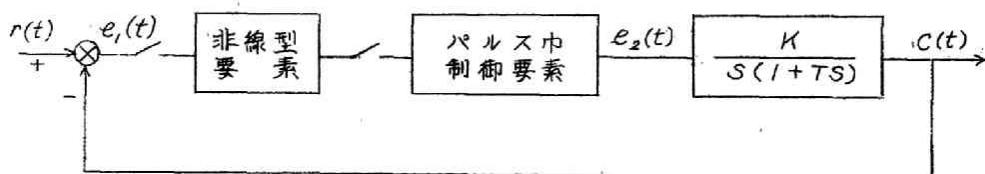
第Ⅱ. 17 図

# 附 録 Ⅲ.

## パルス中制御系の階段状入力に対する設計

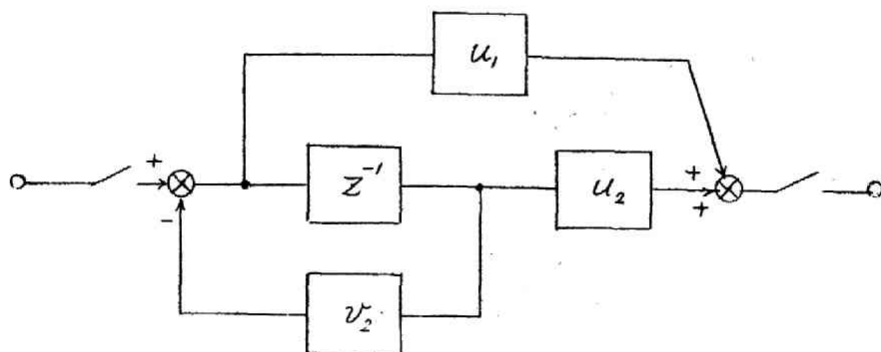
第五章に記した様にパルス中制御要素は非線型特性を有するため、これを適当な非線型要素により補償すれば良好な特性が得られるものと考えられる。

こゝでは簡単のために制御対象の次数が2次の場合について考察する。第Ⅲ.1図に制御系の構成を示す。図中のパルス中制御要素はその入力に比例してパルス中が変化する様な特性であるとする。また制御系入力は任意の大きさの階段状入力とする。

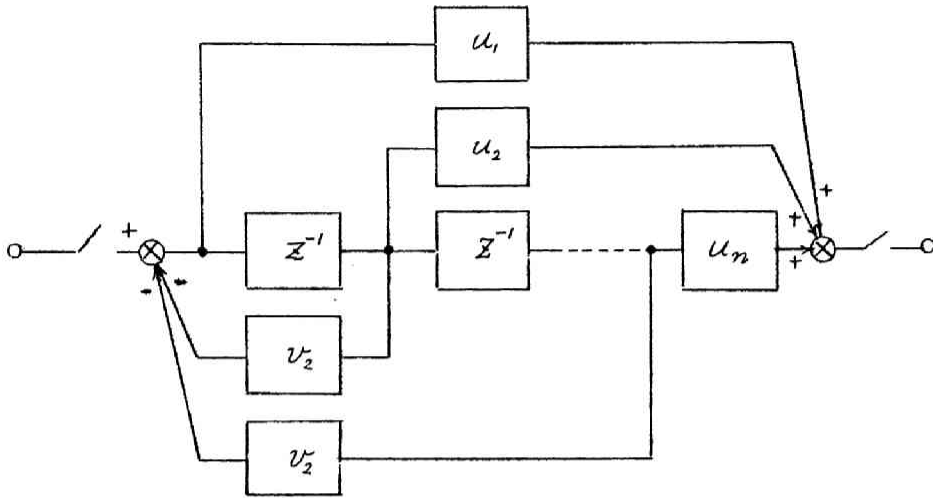


第Ⅲ.1図

第Ⅲ.2図に非線型制御要素の構成を示す。 $u_1$ ,  $u_2$  及び  $v_2$  はいずれも非線型要素である。制御対象の次数が大きくなれば制御要素の構成も複雑となる。その一般的構成を第Ⅲ.3図に示す。



第Ⅲ.2図 非線型制御要素の構成 (制御対象の次数が二次の場合)



第Ⅲ, 3 図 非線型制御要素の一般的構成

いま制御要素の（サンプル点）入力の系列を

$$H, \alpha_2(H), \alpha_3(H), \dots, \alpha_n(H), \dots \quad (\text{Ⅲ}, 1)$$

とし、それに対応する制御要素出力を

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots \quad (\text{Ⅲ}, 2)$$

と表わすと、

$$e_1 = u_1(H) \quad (\text{Ⅲ}, 3)$$

$$e_2 = u_2(H) + u_1 \{ \alpha_2(H) - v_2(H) \} \quad (\text{Ⅲ}, 4)$$

となるが、非線型要素  $v_2$  の特性を、

$$v_2(H) = \alpha_2(H) \quad (\text{Ⅲ}, 5)$$

とえらぶと、

$$u_1(0) = 0 \quad (\text{Ⅲ}, 6)$$

であれば

$$e_2 = u_2(H) \quad (\text{Ⅲ}, 7)$$

と表わされる。さらに  $e_3$  は (Ⅲ, 5) 式を考慮すれば次の関係をうる。

$$e_3 = u_3(H) + u_1 \{ \alpha_3(H) - v_3(H) \} \quad (\text{Ⅲ}, 8)$$

非線型特性  $v_3$  を

$$v_3(H) = \alpha_3(H) \quad (\text{Ⅲ}, 9)$$



とえらぶと、

$$e_3 = u_3(H) \quad (\text{III}, 10)$$

をうる。以下、同様にして第Ⅲ, 3図の制御要素はくⅢ, 1)式で表わされる入力に対し出力  $e_i$  は

$$e_i = u_i(H) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III}, 11)$$

ただし非線型特性  $u_i$  は次式を満足するものとする。

$$u_i(H) = \alpha_i(H) \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (\text{III}, 12)$$

この様な非線型制御要素を用いて任意の大きさの階段状入力に対して有限整定時間応答を示すように設計を行なう。第Ⅲ, 4図に各部の応答の時間的变化を示す。

制御系入力の大きさがある値以上になると制御パルスの中がサンプリング周期  $T_0$  をこえることになるが、簡単のため制御系入力はパルス中が  $T_0$  をこえる程大きくないものと仮定する。

第Ⅲ, 4図(b)に示す様に操作量  $e_2(t)$  は矩形波であるから、制御系出力  $c(t)$  は

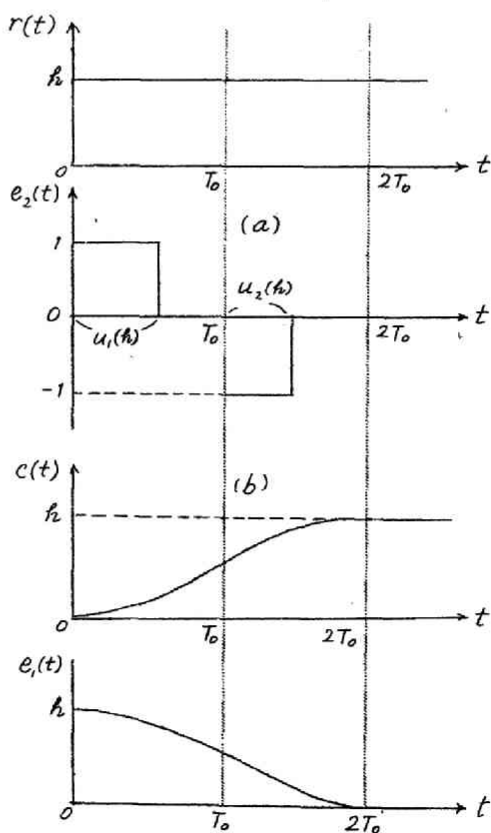
$$\begin{aligned} c(t) = & f(t) - f(t - u_1(h))H(t - u_1(h)) \\ & - f(t - T_0)H(t - T_0) \\ & + f(t - T_0 - u_2(h))H(t - T_0 - u_2(h)) \end{aligned} \quad (\text{III}, 13)$$

ただし

$$f(t) = K[t - T(1 - e^{-t/T})] \quad (\text{III}, 14)$$

設計方針としては  $t = 2T_0$  において、

$$c(2T_0) = h \quad (\text{III}, 15)$$



第Ⅲ, 4図 制御系各部の階段状入力に対する応答

$$C'(2T_0) = 0 \quad (\text{III}, 16)$$

を満足する様にパルス巾  $u_1(h)$ ,  $u_2(h)$  及び  $v_2(h)$  を選定する。

(III, 14) 式を (III, 13) 式に用いて (III, 16) 式の条件を求めると、

$$e^{-2a(1-u_1^*)} - e^{-2a} = e^{-a(1-u_2^*)} - e^{-a} \quad (\text{III}, 17)$$

たゞし、

$$a = T_0/T \quad (\text{III}, 18)$$

$$u_1^* = \frac{u_1}{2T_0} \quad (\text{III}, 19)$$

$$u_2^* = \frac{u_2}{T_0} \quad (\text{III}, 20)$$

また (III, 15) からは、

$$\frac{h}{KT_0} = 2u_1^* - u_2^* \quad (\text{III}, 21)$$

あるいは

$$\frac{h}{K} = u_1 - u_2 \quad (\text{III}, 22)$$

がえられる。従って  $a$  を与えると (III, 17) 式より  $u_1^*$  と  $u_2^*$  の関係が求められ、これを上式に用いることにより関数

$$u_1 = u_1(h) \quad (\text{III}, 23)$$

$$u_2 = u_2(h) \quad (\text{III}, 24)$$

を求められる。また  $v_2(h)$  は (III, 5) 式に示される様に  $\alpha_2(h)$  に等しいが、 $\alpha_2(h)$  は制御系入力に加わってから 1 サンプル周期後における偏差である。従って

$$\alpha_2(h) = h - w(h) \quad (\text{III}, 25)$$

たゞし、

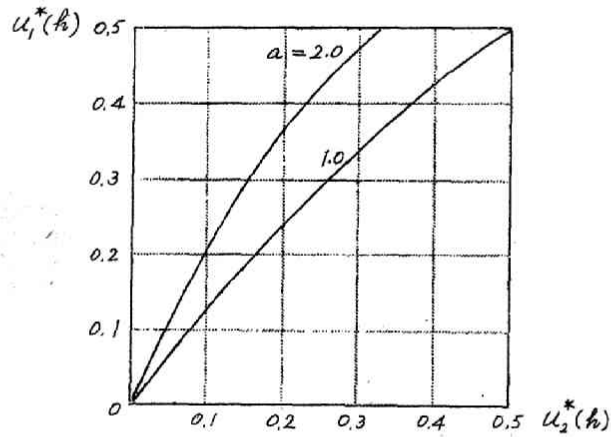
$$w(h) = f(T_0) - f(T_0 - u_1(h)) \quad (\text{III}, 26)$$

(III, 14) 式を用いて整理すれば、

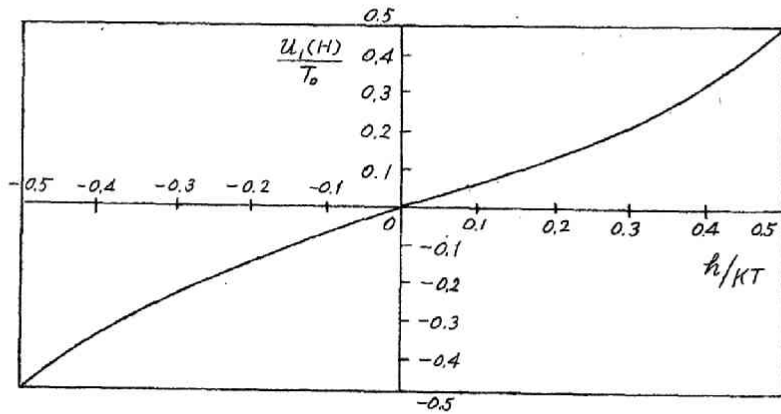
$$\frac{v_2(h)}{KT_0} = \frac{h}{KT_0} - \left[ 2u_1^* + \frac{1}{a} (e^{-a} - e^{-a(1-2u_1^*)}) \right] \quad (\text{III}, 27)$$

をうる。上式から  $u_2(h)$  と  $h$  との関係が求められる。

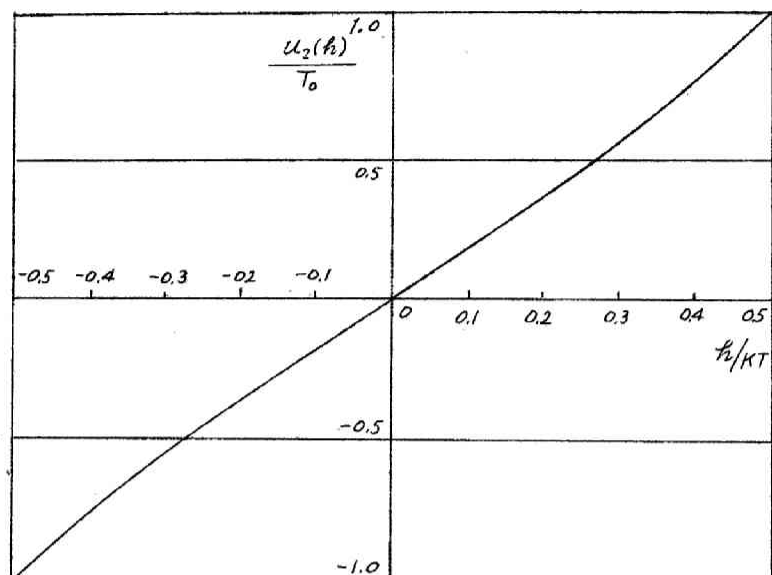
$a = 1.0$  及び  $2.0$  の場合の  $u_1^*(h)$  と  $u_2^*(h)$  との関係を第Ⅲ, 5 図に示す。これを(Ⅲ, 21)式に用いると  $u_1(h)$  及び  $u_2(h)$  として  $a = 1.0$  に対し第Ⅲ, 6 図及び第Ⅲ, 7 図をうる。また(Ⅲ, 27)式よりえられる  $v_2(h)$  を第Ⅲ, 8 図に示す ( $a = 1.0$ )。



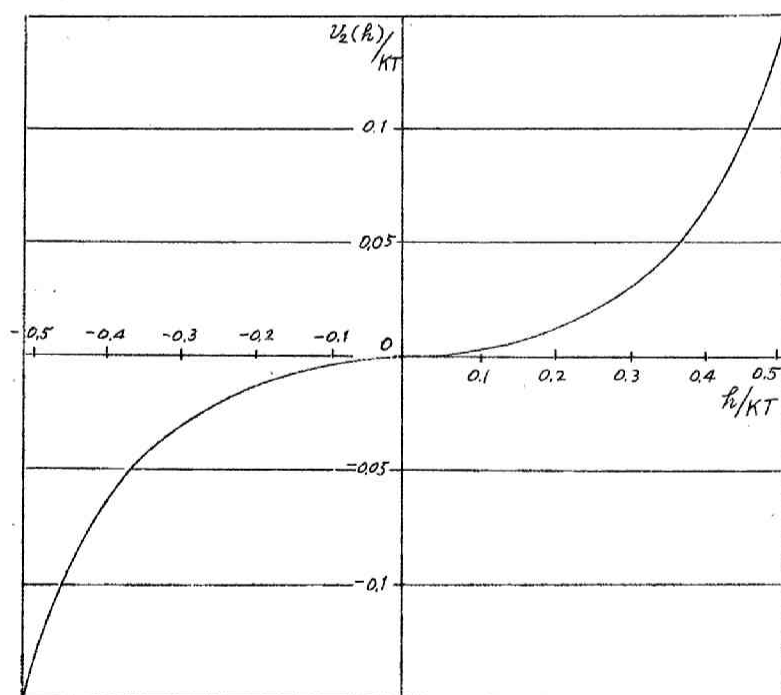
第Ⅲ, 5 図



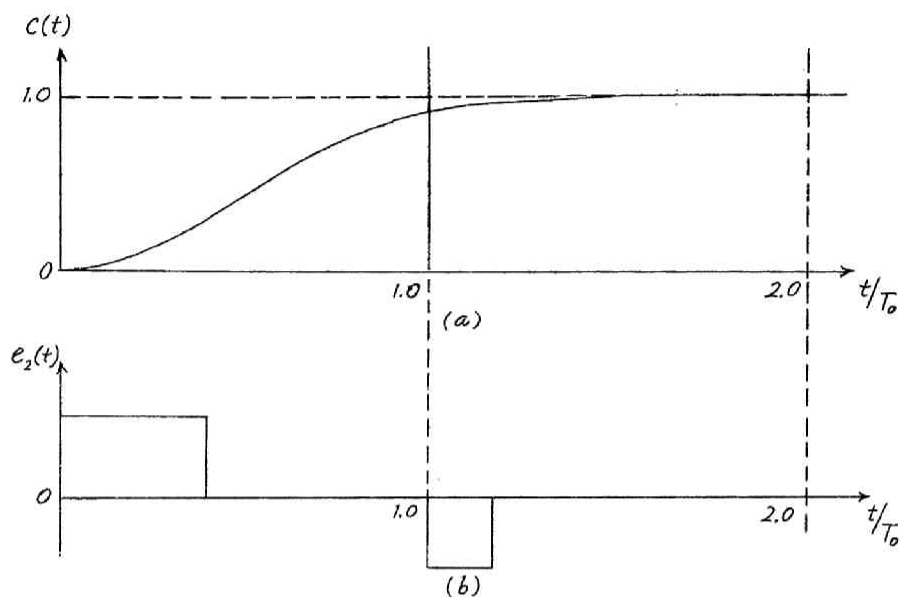
第Ⅲ, 6 図



第 III, 7 图



第 III, 8 图



第Ⅲ, 9 図

第Ⅲ, 9 図は第Ⅲ, 6 図乃至第Ⅲ, 8 図に示した特性の非線型特性をもつ制御要素を用いた場合の制御系応答 (a) 図) 及び操作量の変化 (b) 図) を示すもので、2 サンプル周期たてば有限整定することがわかる。



